

УДК 622.691; 69.035.4; 621.642.37  
DOI 10.29222/ipng.2078-5712.2018-23.art14

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗМЫВАНИЯ ГРУНТА МЕТОДОМ СКВАЖИННОЙ ГИДРОТЕХНОЛОГИИ

Вульфсон А.Н.  
Институт проблем нефти и газа РАН  
E-mail: [vulfson@ipng.ru](mailto:vulfson@ipng.ru)

**Аннотация.** Предложена аналитическая модель процесса размывания мерзлого грунта методом скважинной гидротехнологии, используемой при построении подземных нефтегазохранилищ. В основу модели положено кусочно-гладкое решение уравнения теплопроводности в области с переменной боковой границей.

Полученные результаты позволяют вычислить профиль безразмерной температуры в зоне размывания. Резкое убывание температуры по мере приближения к боковой границе резервуара является следствием увеличения размера газохранилища со временем.

Результаты работы являются существенным дополнением к построению и реализации компьютерного мониторинга.

**Ключевые слова:** подземный резервуар, газохранилище, многолетнемерзлые грунты, автомодельное решение уравнения теплопроводности.

## MODELING THE PROCESS OF SOIL EROSION BY THE METHOD OF BOREHOLE HYDRAULIC TECHNOLOGY

Vulfson A.N.  
Oil and Gas Research Institute of RAS  
E-mail: [vulfson@ipng.ru](mailto:vulfson@ipng.ru)

**Abstract.** An analytical model of the process of erosion of frozen soil by the method of borehole hydraulic technology used in the construction of underground oil and gas storage facilities is proposed. The model is based on a piecewise-smooth solution of the heat equation in a region with a variable lateral boundary.

The model results allow us to calculate the profile of the dimensionless temperature in the erosion zone. The sharp decrease in temperature as it approaches the lateral boundary of the reservoir is a consequence of the increase in the size of the gas storage facility with time.

The results of the work are a significant addition to the construction and realizing of computer monitoring.

**Keywords:** underground reservoir, gas storage, permafrost soils, self-similar solution of heat equation.

### Введение

Использование газообразных и жидких углеводородов в нефтегазовом комплексе России за последнее десятилетие связано с интенсивной газонефтедобычей в районах Крайнего Севера. При промышленной эксплуатации Бованенковского, Харасавэйского, Новопортовского, Ростовцевского и группы Тамбейских месторождений Ямала выход жидких углеводородов достигнет 10–12 млн т/год. Ситуация резко различающихся климатических условий и географической разобщенности районов добычи, переработки и максимального потребления существенно влияет на надежность транспортно-распределительной системы. Надежность таких систем можно значительно повысить созданием резервуарных парков нефтегазохранилищ с суммарным объемом порядка миллиона кубометров.

Геокриологическое строение многолетних мерзлых пород, а также мощности, глубины залегания и физические характеристики на выбранных участках строительства формируют набор параметров, определяющих эволюцию геометрических размеров сооружаемых подземных резервуаров [1].

Одним из наиболее эффективных способов создания газохранилища в мерзлом грунте является метод скважинной гидротехнологии с вертикальным расположением труб [2, 3]. В рамках этого технологического варианта в мерзлый грунт устанавливаются две вертикальные соосные трубы с радиусами  $R_1$  и  $R_0$  и высотами  $h_1$  и  $h_0$  соответственно. При прямоточной схеме выработки по внутренней трубе  $R_0$  в мерзлый грунт поступает горячий пар или вода, размораживающая мерзлый грунт. По внешней трубе  $R_1$  водно-песчаная смесь откачивается на поверхность земли. При прямоточной схеме выработки рост горизонтальных размеров резервуара наиболее равномерен, так как наименее зависит от высоты.

Механизм оттаивания многолетнемерзлых пород можно исследовать методом физического моделирования, формируя камеру с сохранением геометрического и термодинамического подобия. Исследование осесимметричной физической модели, выполненное в [4], показало, что на первом и втором этапе формирования камеры ее боковая поверхность имеет форму, близкую к цилиндрической (рис. 1, 2).

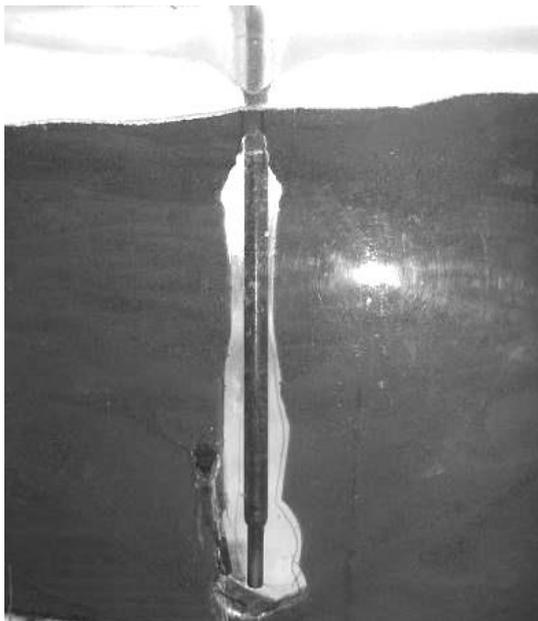


Рис. 1. Первая стадия развития резервуара в мерзлом песке согласно экспериментальным исследованиям [4]

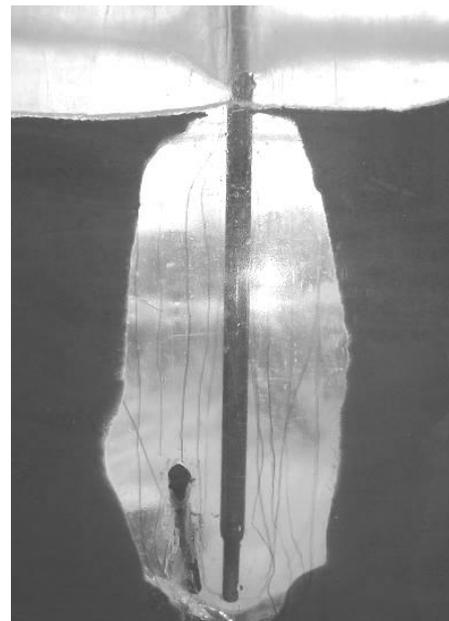


Рис. 2. Вторая стадия развития резервуара в мерзлом песке согласно экспериментальным исследованиям [4]

Согласно [2], цилиндрическая форма резервуаров наблюдается также при звуко-локационном зондировании в условиях сравнительно однородных грунтов (рис. 3).

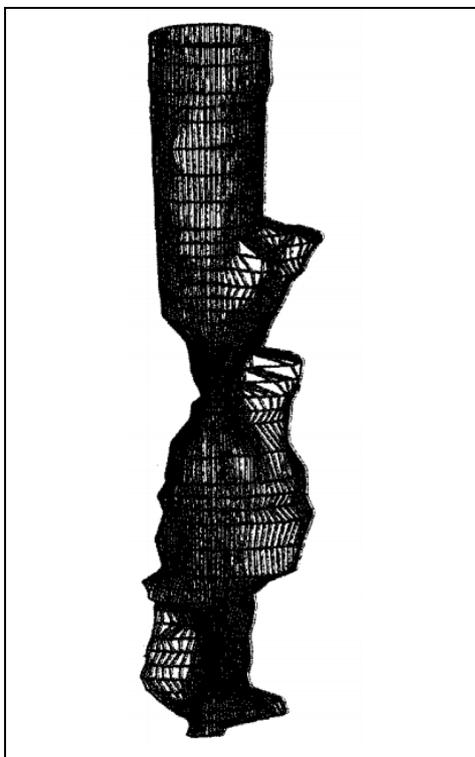


Рис. 3. Схема развития выработки-емкости, построенная по результатам звуколокации [2]

Результаты, представленные на рис. 1–3, позволяют в первом приближении считать область выработки вертикальным цилиндром с подвижной боковой границей и круговым сечением, не зависящим от высоты. Поэтому в настоящей работе рассмотрена осесимметричная математическая модель размывания грунта, основанная на уравнении теплопроводности, заданном в цилиндрической области с подвижной боковой границей. В качестве аналитической аппроксимации температурного профиля поставленной краевой задачи используется кусочно-гладкая функция, составленная из автомодельных решений уравнения теплопроводности, построенных методом теории подобия. Полученные результаты позволяют уточнить математическую модель, лежащую в основе компьютерного мониторинга процесса размывания мерзлого грунта, выполненного на основе оптических методов [5, 6].

### 1. Постановка краевой задачи

Пусть  $t$  – время,  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  – координаты цилиндрической системы, расположенной на поверхности земли так, что ось  $z$  направлена вниз и совпадает с центром вертикальной системы труб. Допустим, что  $T = T(r, \varphi, z, t)$  – абсолютная температура грунта;  $T_0 = 273.1$  – абсолютная температура таяния льда.

Введем локальную безразмерную температуру грунта  $\theta = \theta(r, \varphi, z, t)$ , полагая, что

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}. \quad (1)$$

Пусть  $R_\infty = R_\infty(\varphi, z, t)$  – боковая граница области размывания грунта. Здесь  $R_1$ ,  $h$  – радиус и высота внешней трубы, используемой в методе скважинной гидротехнологии при прямоточной схеме выработки для удаления водно-песчаной смеси.

Будем считать, что процесс размывания происходит в области переменного объема  $V$ , где

$$V = \{0 \leq z \leq h, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, R_1 \leq r \leq R_\infty(\varphi, z, t)\}. \quad (2)$$

Пренебрегая собственными размерами внешней трубы  $R_1$ , т.е. стилизуя тепловой источник отрезком прямой, можно считать, что  $V = V_0$ , где

$$V_0 = \{0 \leq z \leq h, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R_\infty(\varphi, z, t)\}. \quad (3)$$

Для описания процесса размывания в области  $V_0$  используем классическое уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \theta \right) + v_r \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi} \theta + v_z \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \theta. \quad (4)$$

Здесь  $v_r = const$ ,  $v_z = const$  – горизонтальные и вертикальные коэффициенты теплопроводности;  $[v_r] = [v_z] = \text{м}^2 / \text{сек}$ . Оценка величины  $\rho_s v_r \approx 7536 \text{ Дж} / \text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{град}$ , где  $\rho_s \approx 1.8 - 2.5 \text{ тонн} / \text{м}^3$  получена в лабораторных экспериментах [7].

На горизонтальных границах области  $V_0$  в качестве краевых условий для уравнения (4) примем краевые условия Неймана

$$v_z \frac{\partial}{\partial z} \theta \Big|_{z=0} = 0, \quad v_z \frac{\partial}{\partial z} \theta \Big|_{z=h} = 0. \quad (5)$$

На боковых границах области  $V_0$  в качестве краевых условий для уравнения (4) примем краевые условия Дирихле

$$\theta \Big|_{r=0} = T_q(z, t), \quad \theta \Big|_{r=R_\infty(\varphi, z, t)} = 0. \quad (6)$$

Первое соотношение (6) характеризует распределение безразмерной температуры вдоль оси трубы при подаче теплоносителя (горячей воды или пара) в зависимости от высоты и времени  $T_q = T_q(z, t)$ .

Второе соотношение (6), представляющее собой краевое условие Дирихле, означает, что внешняя боковая граница слоя соответствует изотерме таяния льда.

Выполним естественные упрощения исходной задачи (4)–(6). В условиях осесимметрии боковая граница области будет иметь форму цилиндрической поверхности переменного радиуса  $R_\infty = R_\infty(z, t)$ . При этом

$$\bar{V}_0 = \{0 \leq z \leq h, 0 \leq r \leq R_\infty(z, t)\}. \quad (7)$$

В данном случае для описания процесса размывания в области  $\bar{V}_0$  уравнение теплопроводности (4) следует использовать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( v_r r \frac{\partial}{\partial r} \theta \right) + v_z \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \theta. \quad (8)$$

Для дальнейшего упрощения задачи дополним предположение об осесимметрии предположением о вертикальной однородности. В этих условиях зависимость от  $z$  отсутствует, поэтому внешняя боковая граница области будет иметь форму цилиндрической поверхности с сечением одинакового радиуса  $R_\infty = R_\infty(t)$ , см. рис. 4.

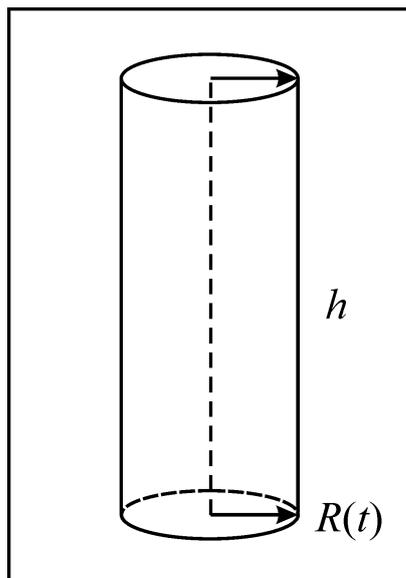


Рис. 4. Цилиндрическая аппроксимация формы подземного резервуара

При этом уравнение (8) примет форму

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( v_r r \frac{\partial}{\partial r} \theta \right), \quad 0 \leq r \leq R_\infty(t). \quad (9)$$

Соответствующие краевые условия задачи (9) будут иметь вид

$$\theta|_{r=0} = T_q(t), \quad \theta|_{r=R_\infty(t)} = 0. \quad (10)$$

Заметим, что уравнения (9), (10) можно рассматривать также как результат усреднения общих уравнений (4)–(6) по высоте  $z$  и углу  $\varphi$ , см. [8].

## 2. Преобразование уравнений к фиксированной пространственно-временной области

Введем новую безразмерную переменную  $\eta = r / R_\infty(t)$ . Это преобразование переводит расширяющуюся область  $0 \leq r \leq R_\infty(t)$  в область постоянной пространственно-временной геометрии  $0 \leq \eta \leq 1$ .

Будем искать решение задачи (9), (10) в виде

$$\theta(r, t) = \theta_*(\eta, t), \quad \eta = \frac{r}{R_\infty(t)}, \quad (11)$$

где  $\eta$  – безразмерный параметр длины;  $\theta_*(\eta, t)$  – преобразованная функция.

Преобразуем (9) с учетом (11). Для этого вычислим производную по времени и производную от потока тепла, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta(r, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \theta_* + \frac{d}{d\eta} \theta_* \cdot \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \theta_* - \frac{r}{R_\infty^2} \frac{dR_\infty}{dt} \frac{d}{d\eta} \theta_* = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \theta_* - \frac{1}{R_\infty} \frac{dR_\infty}{dt} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \theta_* \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( v_r r \frac{\partial}{\partial r} \theta \right) = \frac{v_r}{R_\infty^2} \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \theta_* \right). \quad (13)$$

Подставляя (12), (13) в уравнение (9), найдем, что

$$R_\infty^2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_* - R_\infty \frac{dR_\infty}{dt} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \theta_* \right) - \frac{v_r}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \theta_* \right) = 0. \quad (14)$$

Подстановка (11) в краевые условия (10) приводит к выражениям

$$\theta_* \Big|_{\eta=0} = T_q(t), \quad \theta_* \Big|_{\eta=1} = 0. \quad (15)$$

Заметим, что при заданном законе расширения области  $R_\infty = R_\infty(t)$  уравнение (14) имеет особенность при  $\eta = 0$ . Поэтому численное решение уравнений (14), (15) требует привлечения некоторых специальных приемов.

#### 4. Квазигладкое аналитическое решение

Построим квазигладкое решение системы (14), (15). В случае  $T_q = const$  поток тепла можно полагать стационарным, поэтому в соответствии с [8] будем считать, что

$$R_\infty^2(t) = 2\lambda_\infty v_r t, \quad R_\infty \frac{dR_\infty}{dt} = \lambda_\infty v_r, \quad \lambda_\infty = \lambda_\infty(Q_0 / v_r), \quad (16)$$

где  $\lambda_\infty = \lambda_\infty(Q_0 / v_r)$  – постоянный коэффициент, зависящий от параметров задачи.

Подставляя (16) в (14) найдем, что

$$R_\infty^2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_* - \lambda_\infty v_r \left( \eta \frac{d}{d\eta} \theta_* \right) - \frac{v_r}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \theta_* \right) = 0. \quad (17)$$

Пусть  $\eta_0$  – параметр, заданный априорно. Квазигладкое аналитическое решение (17) будем искать в виде

$$\theta_*(\eta) = \begin{cases} \theta_*^{(1)}(\eta), & \theta_*^{(1)}(0) = T_q, \quad \text{при } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ \theta_*^{(2)}(\eta), & \theta_*^{(2)}(1) = 0, \quad \text{при } \eta_0 \leq \eta \leq 1 \\ \theta_*^{(1)}(\eta_0) = \theta_*^{(2)}(\eta_0) \end{cases} \quad (18)$$

Здесь  $\theta_*^{(1)}(\eta)$ ,  $\theta_*^{(2)}(\eta)$  – частные решения уравнения (17), удовлетворяющие краевым условиям в соответствующих областях и условию непрерывного сшивания в точке  $\eta = \eta_0$ .

Таким образом, аппроксимация (18) сохраняет непрерывность в точке  $\eta = \eta_0$ , но не предполагает сохранения гладкости. Поэтому (18) следует рассматривать как квазигладкое решение.

Выберем функцию  $\theta_*^{(1)}(\eta)$  так, что

$$\theta_*^{(1)}(\eta) = T_q \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0. \quad (19)$$

Очевидно, что функция  $\theta_*^{(1)}(\eta)$  удовлетворяет краевому условию  $\theta_*^{(1)}(0) = T_q$  и является решением уравнения (17).

Выберем функцию  $\theta_*^{(2)}(\eta)$  так, что

$$\begin{cases} \lambda_\infty \left( \eta \frac{d}{d\eta} \theta_*^{(2)}(\eta) \right) + \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d}{d\eta} \theta_*^{(2)}(\eta) \right) = 0, & \text{при} \quad \eta_0 \leq \eta \leq 1 \\ \theta_*^{(2)}(1) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Очевидно, что функция  $\theta_*^{(2)}(\eta)$  удовлетворяет краевому условию  $\theta_*^{(2)}(1) = 0$  и является решением уравнения (17).

Для интегрирования (20) введем новую переменную  $w_*^{(2)}$ , пропорциональную кондуктивному потоку тепла, так что

$$w_*^{(2)} = \eta \frac{d}{d\eta} \theta_*^{(2)}(\eta), \quad \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} w_*^{(2)} + \lambda_\infty w_*^{(2)} \eta = 0. \quad (21)$$

Преобразование второго уравнения (21) приводит к равенствам

$$\frac{d}{d\eta} \ln w_*^{(2)}(\eta) = -\frac{1}{2} \lambda_\infty \eta^2, \quad w_*^{(2)}(\eta) = \frac{Q_0}{v_r} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_\infty \eta^2 \right\}. \quad (22)$$

Неопределенный множитель  $Q_0 / v_r$  в уравнении (22) является безразмерным, т.к. размерности теплового потока и коэффициента диффузии совпадают, т.е.

$$[Q_0] = [v_r r \partial \theta / \partial r] = [v_r] = m^2 / c.$$

Для построения профиля  $\theta_*^{(2)}(\eta)$  проинтегрируем первое уравнение (21) с учетом второго уравнения (22) краевого условия (20), тогда

$$\theta_*^{(2)}(\eta) = \frac{Q_o}{v_r} \int_{\eta}^1 \frac{1}{\eta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_{\infty}\eta^2\right\} d\eta. \quad (23)$$

При априорно заданном параметре  $\eta_0$  неопределенный безразмерный множитель  $Q_o / v_r$  определяется из условия непрерывного сшивания (18), так что

$$\theta_*^{(2)}(\eta_0) = \theta_*^{(1)}(\eta_0), \quad \frac{Q_o}{v_r} = \frac{T_q}{\int_{\eta_0}^1 \frac{1}{\eta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_{\infty}\eta^2\right\} d\eta}. \quad (24)$$

Таким образом, нормированный температурный профиль (1), соответствующий квазигладкому аналитическому решению (18), будет иметь вид

$$\frac{T(\eta) - T_0}{T_0} = \begin{cases} T_q, & \text{при } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ T_q \cdot \frac{\int_{\eta}^1 \frac{1}{\eta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_{\infty}\eta^2\right\} d\eta}{\int_{\eta_0}^1 \frac{1}{\eta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_{\infty}\eta^2\right\} d\eta}, & \text{при } \eta_0 \leq \eta \leq 1. \end{cases} \quad (25)$$

Положим  $\eta_0 = 0.15$  и  $T_q = 0.18$ . Эта величина соответствует температуре теплоносителя (горячей воды или пара)  $t_q = 50^\circ\text{C}$ . Профиль нормированной температуры (25) с заданными параметрами представлен на рис. 5.

Согласно результатам, представленным на рис. 5, температура в резервуаре резко убывает при приближении к подвижной границе области.

### Заключение

В работе предложена аналитическая модель процесса размывания грунта методом скважинной гидротехнологии, широко используемой при построении подземных нефтегазохранилищ в мерзлых грунтах. В основу модели положено уравнение теплопроводности в области с переменной боковой поверхностью, на границах которой поставлены краевые условия Дирихле. Такая постановка естественно дополняет краевую задачу [8], в которой использовались условия Синьорини.

Представленные результаты позволяют описать пространственно-временные зависимости профиля нормированной безразмерной температуры в зоне размывания. Особенностью полученного профиля является его резкое убывание по мере приближения к боковой границе резервуара. Экспоненциальное убывания профиля безразмерной температуры является следствием увеличения размера газохранилища со временем.

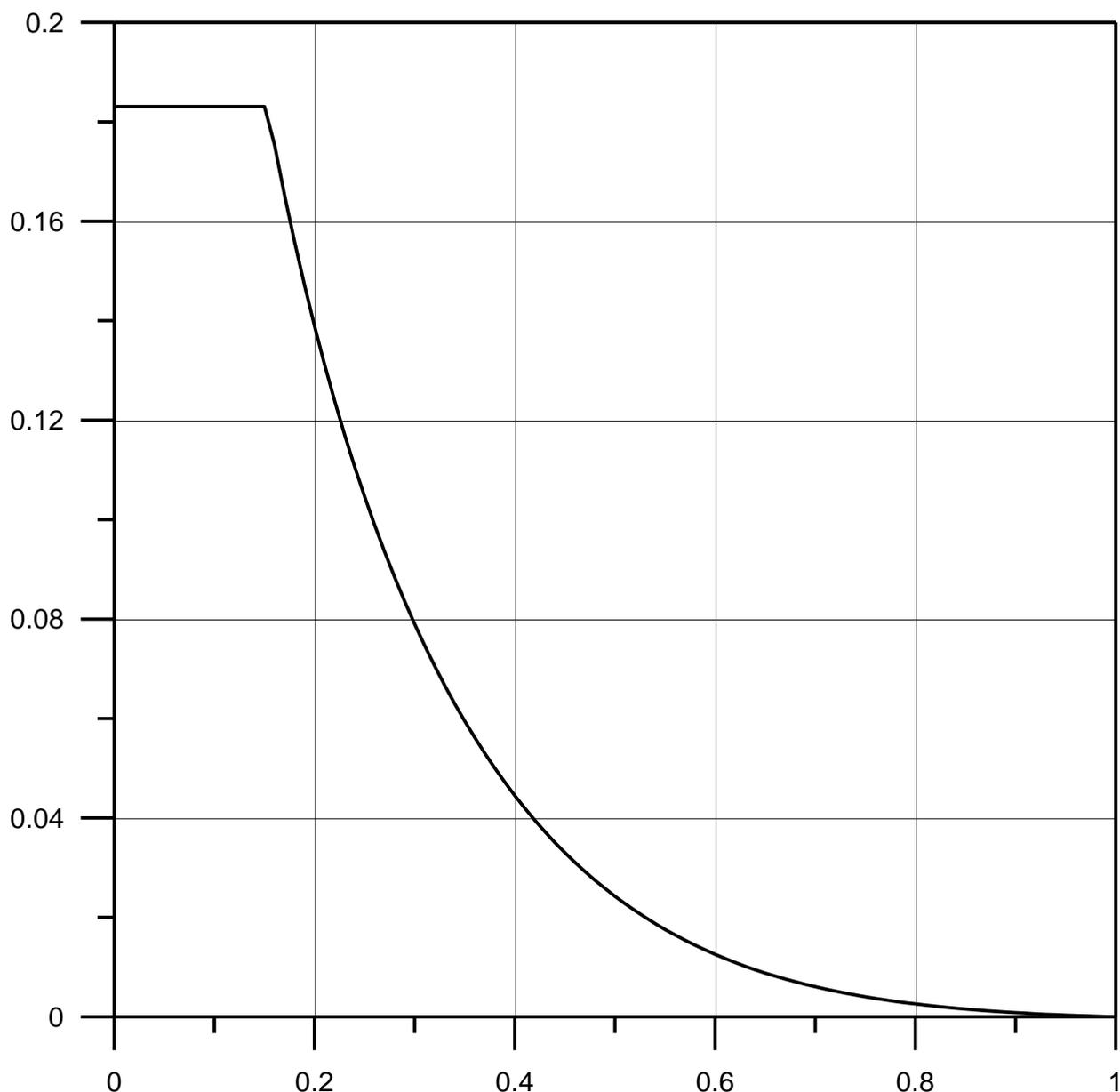


Рис. 5. Профиль нормированной температуры (2.5) с параметрами  $\eta_0 = 0.15$  и  $T_q = 0.18$

Результаты работы могут быть эффективно использованы при построении и реализации компьютерного мониторинга.

*Статья написана в рамках выполнения государственного задания (тема «Энергетика, динамика и дегазация Земли, теоретические и экспериментальные основы инновационных сейсмоакустических технологий исследования геологической среды и контроля за объектами нефтегазодобычи», № АААА-А16-116021510125-7).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баулин В.В., Дубиков Г.И., Аксенов В.И. и др. Геокриологические условия Харасавэйского и Крузенштерновского газоконденсатных месторождений (полуостров Ямал) // М.: ГЕОС, 2003. 180 с.
2. Смирнов В.И. Строительство подземных газонефтехранилищ: Учебное пособие для вузов // М. Газоил пресс, 2000. 250 с.
3. Аксютин О.Е., Казарян В.А., Ишков А.Г., Хлопцов В.Г., Теплов М.К., Хрулев А.С., Савич О.А., Сурин С.Д. Строительство и эксплуатация резервуаров в многолетнемерзлых осадочных породах // М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 432 с.
4. Карпухин А.Н., Савич О.И., Сурин С.Д. Особенности процесса оттаивания многолетнемерзлых песков при скважинной гидродобыче на полуострове Ямал // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2010. № 4. С. 365–371.
5. Вульфсон А.Н., Бородин О.О. О возможности использования оптического принципа Гюйгенса для расчета формы резервуара подземного газохранилища в мерзлых грунтах // Актуальные проблемы нефти и газа. 2016. Вып. 3(15). 12 с. – Режим доступа: <http://www.oilgasjournal.ru> (Дата обращения 28.11.2018).
6. Вульфсон А.Н., Бородин О.О. Лучевой метод геометрической оптики и перемещение фронта размывания при формировании объема подземного резервуара. // Актуальные проблемы нефти и газа. 2018. Вып. 2(21). 9 с. – Режим доступа: <http://www.oilgasjournal.ru> (Дата обращения 28.11.2018).
7. Каркашадзе Г.Г., Шергин Д.В., Луняков В.А., Банников Д.О. Методика определения удельной теплоемкости и коэффициента температуропроводности горных пород методом импульсного нагрева в лабораторных условиях // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2011. № 9. С. 137–140.
8. Вульфсон А.Н., Бородин О.О. Приложение теории подобия к описанию скорости размывания грунта методом скважинной гидротехнологии и оценка размера резервуара газохранилища при звуковом локационном зондировании // Актуальные проблемы нефти и газа. 2018. Вып. 3(22). 9 с. – Режим доступа: <http://www.oilgasjournal.ru> (Дата обращения 28.11.2018).