РАСЧЕТ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ПРИ НАЛИЧИИ КАВЕРН

Д.А. Митрушкин, П.Ю. Томин
ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, e-mail: office@keldysh.ru

Введение

Трещиновато-пористые среды при наличии каверн достаточно сложны для численного моделирования фильтрационных задач. Такие среды характеризуются несколькими типов пустот (рис.1).

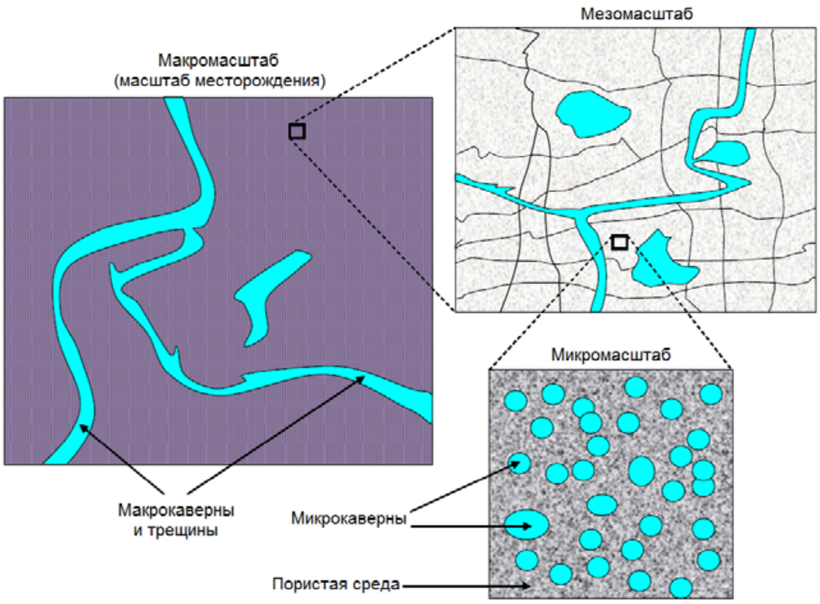

Рис. 1. Многомасштабный характер каверн и трещин [1]

Одновременное присутствие зон пористости и свободного течения существенно влияет на эффективную проницаемость среды в целом, особенно в случае связанных сетей трещин и каверн.

Моделирование кавернозно-пористых сред традиционно осуществляется с помощью совместного решения уравнений Стокса и Дарси [2–6]. Течение в пористых зонах описывается уравнением Дарси, в то время как уравнение Стокса используется для зон свободного течения. На границе между двумя зонами могут задаваться различные типы условий согласования [3–5].

Существует несколько аспектов, которые затрудняют применение подхода Дарси–Стокса для моделирования течения в кавернозных коллекторах. Во-первых, требуется точное знание геометрии зон свободного течения. Во-вторых, необходимо численно или экспериментально определить параметры для условий согласования на границе раздела зон.

Альтернативным способом моделирования кавернозных сред является использование уравнения Стокса−Бринкмана [1, 2, 7], позволяющее реализовать единый подход к расчету течения как для пористых, так и пустотных зон. Уравнение Стокса−Бринкмана переходит в уравнения Стокса и Дарси при соответствующем выборе параметров модели. Так как различные типы сред задаются лишь коэффициентами в уравнении, то нет необходимости формулировать дополнительные условия на границе раздела зон, что упрощает численную реализацию, а также позволяет использовать более грубые расчетные сетки, не адаптированные к структуре среды.

1. Многомасштабные модели кавернозной среды

Целесообразно учитывать два масштаба среды: подробный (мелкомасштабный) и грубый (крупномасштабный). Мелкомасштабная среда состоит из пористых зон и зон свободного течения, которые представлены кавернами и трещинами. Пористые зоны состоят из непроницаемого скелета и порового пространства, заполненного флюидом. Эта подробная мелкомасштабная структура описывается такими макропараметрами, как пористость и проницаемость. Характерные мелкомасштабные и крупномасштабные размеры обозначаются l и L соответственно. Все величины, характерные для подробного масштаба, отмечаются индексом ε ($\varepsilon = l/L$), остальные − относятся к грубому масштабу.

Крупномасштабное описание среды основано на модели течения Дарси. При этом мелкомасштабные особенности (каверны и трещины), наряду с окружающей пористой матрицей, показываются как осредненная среда с эффективными значениями пористости и проницаемости.

Введем обозначения: Ω^f – зона свободного течения, Ω^p – пористая зона, Γ – граница между ними. Мелкомасштабную скорость обозначим как v^ε, а давление – p^ε. При этом в зоне свободного течения скорость v^ε является реальной скоростью течения флюида, а в пористой среде – осредненной скоростью Дарси.

2. Модель Дарси−Стокса

Данная модель описывается связанной системой уравнений для определения полей давления и скоростей. Уравнение Стокса, используемое для описания зоны свободного течения, имеет вид:

$$\nabla p^{\varepsilon} - \mu \Delta v^{\varepsilon} = \varphi \qquad \text{в } \Omega^{f}. \tag{1}$$

$$\nabla \cdot v^{\varepsilon} = 0 \qquad \text{в } \Omega^{f}. \tag{2}$$

Уравнение (1) выражает баланс импульса, а (2) – закон сохранения массы.

В пористой зоне закон сохранения импульса выражается законом Дарси. В этом случае полная система уравнений будет иметь вид:

$$v^{\varepsilon} = -\frac{K}{\mu}\left(\nabla p^{\varepsilon} - \varphi\right) \qquad \text{в } \Omega^{p}. \tag{3}$$

$$\nabla \cdot v^{\varepsilon} = 0 \qquad \text{в } \Omega^{p}. \tag{4}$$

Входящие в уравнения параметры описываются ниже.

Эти две системы уравнений должны быть связаны на границе раздела зон Γ с помощью дополнительных условий, а именно, условий непрерывности потока массы и импульса через границу и выражений для тангенциальной компоненты скорости [3-5].

3. Модель Стокса−Бринкмана

В качестве альтернативного подхода предлагается использовать единое для пористой зоны и зоны свободного течения уравнение Стокса–Бринкмана:

$$\mu K^{-1} v^{\varepsilon} + \nabla p^{\varepsilon} - \mu^{*} \Delta v^{\varepsilon} = \varphi \qquad \text{в } \Omega. \tag{5}$$

$$\nabla \cdot v^{\varepsilon} = 0 \qquad \text{в } \Omega, \tag{6}$$

где K – тензор абсолютной проницаемости, μ – вязкость флюида, μ^{*} – эффективная вязкость, φ – объемные силы (например, гравитация).

Вязкость флюида μ является свойством рассматриваемой жидкости (воды, нефти и т. д.) и не зависит от того, в какой зоне рассматривается течение, в то время как K и μ^{*} непосредственно зависят от типа рассматриваемой среды.

Предполагается, что в зоне свободного течения Ω^{f} проницаемость формально равна бесконечности, а эффективная вязкость – вязкости флюида:

$$K = \infty, \qquad \mu^{*} = \mu \qquad \text{в } \Omega^{f}. \tag{7}$$

Отметим, что при таких значениях параметров система уравнений (5)–(6) переходит в систему уравнений Стокса (1)–(2).

В пористой зоне Ω^{p} тензор проницаемости K эквивалентен проницаемости Дарси пористой среды. Представим соотношение (5) в виде:

$$\nabla p^{\varepsilon} = -\mu K^{-1} v^{\varepsilon} + \mu^{*} \Delta v^{\varepsilon} + \varphi \qquad \text{в } \Omega. \tag{8}$$

В пористой среде значения проницаемости K обычно варьируются в диапазоне $0.001 \div 1$ Дарси. Так, если эффективная вязкость имеет тот же порядок величины, что и вязкость флюида, то значение слагаемого $\mu K^{-1} v^{\varepsilon}$ в уравнении (8) на несколько порядков превосходит значение $\mu^{*} \Delta v^{\varepsilon}$. Таким образом, дополнительный член, включающий эффективную вязкость, вносит лишь небольшие возмущения в закон Дарси, и в результате уравнение (8) переходит в (3). Простейшим возможным значением для эффективной вязкости μ^{*} является $\mu^{*} = \mu$.

4. Ремасштабирование

Кратко опишем процедуру ремасштабирования для уравнения Стокса–Бринкмана при переходе от подробного к грубому масштабу среды. Рассмотрим элементарный объем Y, который содержит как пористые зоны, так и зоны свободного течения. Подставляя разложения v^{ε} и p^{ε} по степеням малого параметра ε в систему уравнений (5)–(6) и предполагая, что

$$\mu K^{-1} \geq O(\varepsilon^{-2}), \tag{9}$$

получаем набор задач для расчета эффективной (ремасштабированной) проницаемости.

Пусть d – размерность пространства (2 или 3), а e_i – единичный вектор в i-м направлении ($i = 1, \ldots, d$). Тогда d-мерные мелкомасштабные задачи для ремасштабирования имеют вид:

$$K^{-1} w^{i} + \nabla_{Y} q^{i} - \frac{\mu^{*}}{\mu} \Delta_{Y} w^{i} = e_{i} \quad \text{в } Y. \tag{10}$$

$$\nabla_{Y} \cdot w = 0 \qquad \text{в } Y. \tag{11}$$

Здесь w^{i} и q^{i} – мелкомасштабные скорость и давление, соответствующие действию единичной силы в направлении i.

Крупномасштабная (ремасштабированная) проницаемость K^{*} вычисляется с помощью осреднения мелкомасштабных скоростей:

$$\bar{K}_{ij} := \left\langle w_{i}^{j} \right\rangle_{Y} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y} w_{i}^{j} \, dy. \tag{12}$$

5. Результаты расчетов

Допустим, что рассматривается образец среды с однородной проницаемостью $K = 67\ мД$ и включением каверн, доля которых в общем объеме составляет $\varphi_K = 0.1$ (рис. 2).

Согласно описанному выше алгоритму расчета эффективной проницаемости проводятся два расчета: для $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$, см. формулу (10). Как для давления p, так и для скорости v задаются периодические граничные условия. Соответствующие распределения давления и линии тока представлены на рис. 3.

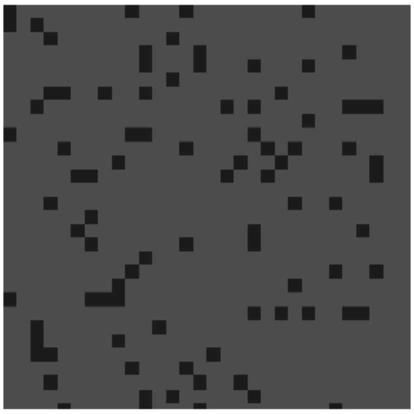

Рис. 2. Распределение каверн в образце

а *б*

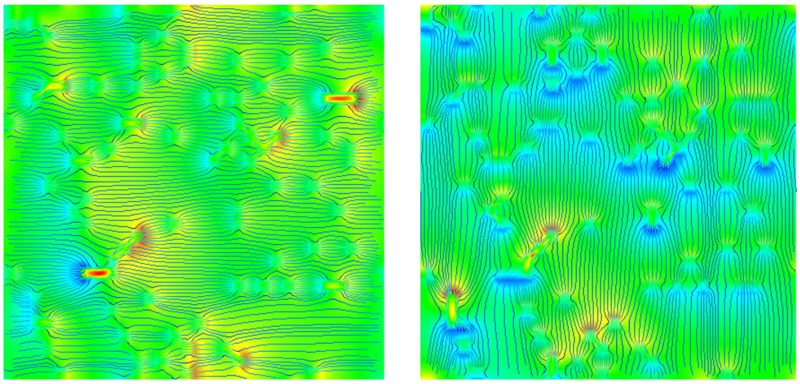

Рис. 3. Распределение давления и линии тока: $а$ – для e_1 и $б$ – для e_2

Полученный по формуле (12) тензор эффективной проницаемости образца имеет вид:

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} 85.6 & 0.6 \\ 0.6 & 86.0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Как видно, образец оказался практически изотропным, что обусловлено равномерным пространственным распределением каверн и их слабой связностью, за счет каверн проницаемость возросла почти на 30%. Отметим симметричность полученного тензора, что является следствием физической корректности алгоритма.

6. Двухфазный случай

Представленные выше модели и алгоритмы справедливы для описания однофазного течения жидкости. Рассмотрим далее случай двухфазного течения несмешивающихся жидкостей (нефти и воды).

Для описания свободного течения в кавернах и трещинах используется следующий метод (Volume of fluid method [8]). Двухфазная система рассматривается как единый флюид с вязкостью μ, зависящей от насыщенностей фаз:

$$\mu = s_w \mu_w + s_o \mu_o \qquad \text{в } \Omega^f. \tag{14}$$

Для насыщенностей выполняется следующее соотношение:

$$s_o + s_w = 1. \tag{15}$$

Распределение насыщенности меняется со временем в соответствии с уравнением переноса:

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + \nabla(s_\alpha v^\varepsilon) = 0, \quad \alpha = o, w \quad \text{в } \Omega^f. \tag{16}$$

Уравнение для закона сохранения импульса в двухфазном случае будет иметь вид [9]:

$$\nabla p^\varepsilon - \mu \Delta v^\varepsilon = \varphi + \varphi_{cap}(s_\alpha) \qquad \text{в } \Omega^f, \tag{17}$$

где φ_{cap} – капиллярные силы между двумя фазами, для которых справедливо следующее приближение [10]:

$$\varphi_{cap}(s_\alpha) = \gamma \chi \nabla s_\alpha. \tag{18}$$

Здесь γ – поверхностное натяжение, χ – кривизна границы раздела, s_α – насыщенность одной из фаз.

Обобщенный закон Дарси в пористой зоне в двухфазном случае записывается для каждой из фаз и содержит дополнительный множитель – относительную фазовую проницаемость f_α, зависящую от насыщенности фазы s_α (объемной доли фазы):

$$v_\alpha^\varepsilon = -\frac{f_\alpha(s_\alpha)K}{\mu_\alpha}\left(\nabla p_\alpha^\varepsilon - \varphi\right), \quad \alpha = o, w \qquad \text{в } \Omega^p. \tag{19}$$

Для однородного описания двухфазного течения в порово-кавернозном коллекторе предлагается использовать следующее обобщение модели Стокса−Бринкмана.

Закон сохранения импульса для каждой из фаз:

$$\left(f_\alpha(s_\alpha)K\right)^{-1} \mu_\alpha v_\alpha{}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \mu \Delta v^\varepsilon = \varphi + \varphi_{cap}(s_\alpha) \qquad \text{в } \Omega; \tag{20}$$

Закон сохранения массы каждой фазы:

$$(\nabla \cdot v_\alpha^\varepsilon = 0) \quad \text{в } \Omega. \tag{21}$$

Уравнение переноса для насыщенности (16) и соотношение для насыщенностей (15).

Отметим, что для случая свободного течения из пары уравнений в (20) и (21) остается только по одному уравнению для скорости единой фазы.

7. Ремасштабирование абсолютных и фазовых проницаемостей

Аналогично однофазному случаю, для перехода от мелкого к крупному масштабу проводится расчет эффективных (ремасштабированных) параметров модели, d-мерные мелкомасштабные задачи, необходимые для ремасштабирования уравнения Стокса–Бринкмана для двухфазного случая, имеют вид:

$$\left(f_\alpha(s_\alpha)K\right)^{-1}\mu_\alpha w_\alpha{}^i+\nabla_Y q^i-\mu\Delta_Y w^i=e_i \qquad \text{в } Y, \tag{22}$$

$$\nabla_Y\cdot w=0 \qquad \text{в } Y. \tag{23}$$

При этом ремасштабированная абсолютная проницаемость $\bar{K}$ вычисляется согласно формулам (12), а для ремасштабированных фазовых проницаемостей $\bar{f}_\alpha(s_\alpha)$ справедливо следующее соотношение [11]:

$$\bar{f}^\alpha\left(\bar{s}_\alpha\right)=\frac{\sum k_i h_i f^\alpha\left(s_{\alpha i}\right)}{\bar{K}_{ij}\sum h_i}, \qquad \alpha=o,w. \tag{24}$$

По границе области Y производится суммирование. Здесь k_i – значения коэффициента проницаемости в ячейках подробной сетки, h_i – длины ребер ячеек, $s_{\alpha i}$ – насыщенности в ячейках подробной сетки. Величина насыщенности $\bar{s}_\alpha$ вычисляется как среднее арифметическое от насыщенностей в ячейках подробной сетки.

8. Результаты расчетов для двухфазного случая

Возьмем тестовый пример из расчета однофазного течения (п. 5) и посмотрим, как будет выглядеть картина течения для двухфазного случая. В образец породы, заполненный нефтью, через верхнюю границу области начинают закачивать воду. Распределение насыщенности воды представлено на рис. 4. Здесь красный цвет соответствует значению насыщенности, равному 1, а синий – 0. Относительные фазовые проницаемости для этого случая показаны на рис. 5. Из рис.5 видно, что анизотропия присутствует, но не столь существенна.

а *б*

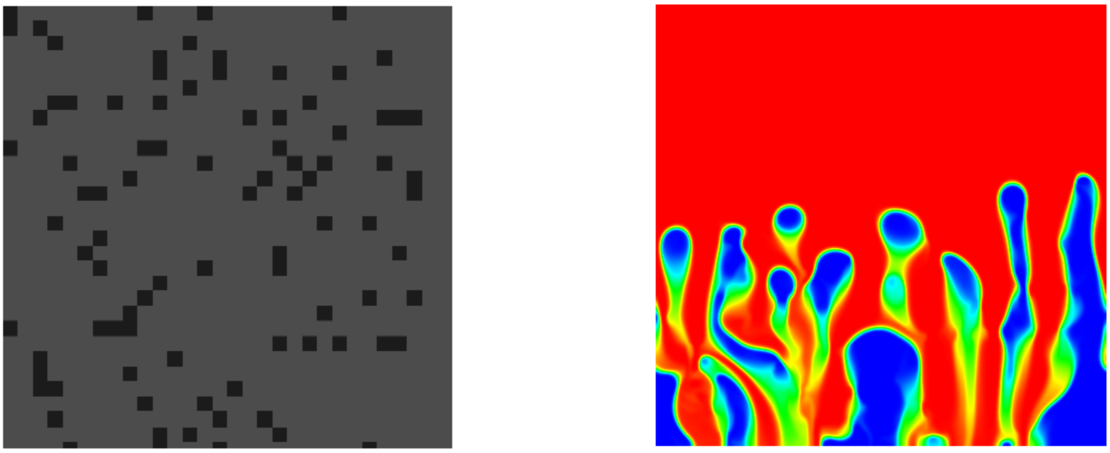

Рис. 4. Распределение каверн (*а*) и результаты расчета – поле насыщенности воды (*б*), см. текст

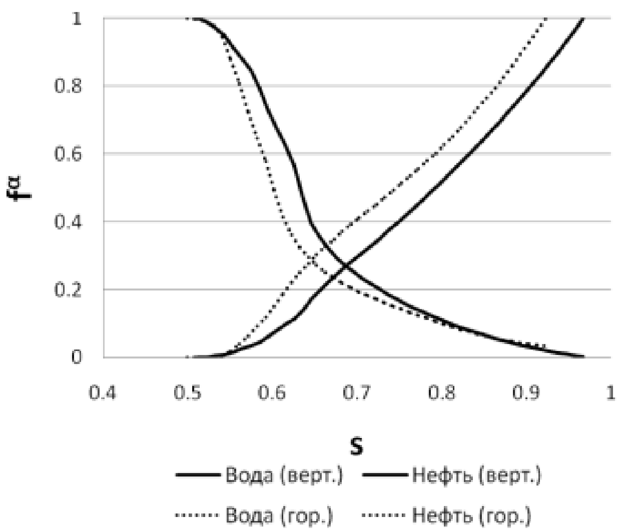

Рис. 5. Относительные фазовые проницаемости для нефти и воды, см. текст

Перейдем к случаю протяженных каверн, которые ориентированы в вертикальном направлении. Рассматривается образец среды с однородной проницаемостью $K = 90\ мД$ и включением каверн, доля которых в общем объеме составляет уже 20% (рис. 6).

Эффективный тензор абсолютной проницаемости имеет более выраженный анизотропный характер:

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} 125.8 & -0.3 \\ -0.3 & 85.6 \end{pmatrix}$$

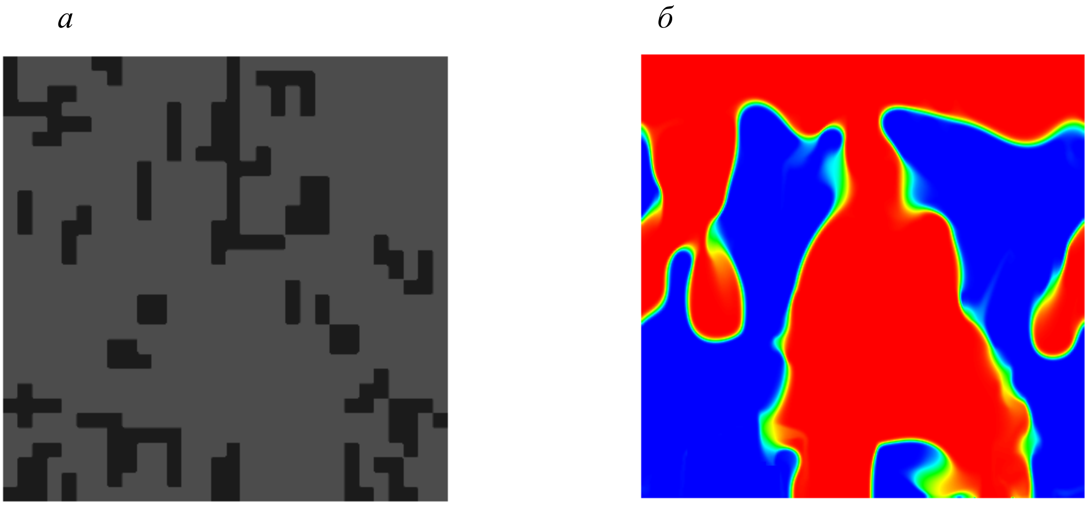

Рис. 6. Распределение каверн (*а*) и результаты расчета – поле насыщенности воды (*б*), см. текст

Аналогичный характер анизотропии показывают и эффективные фазовые проницаемости (рис. 7).

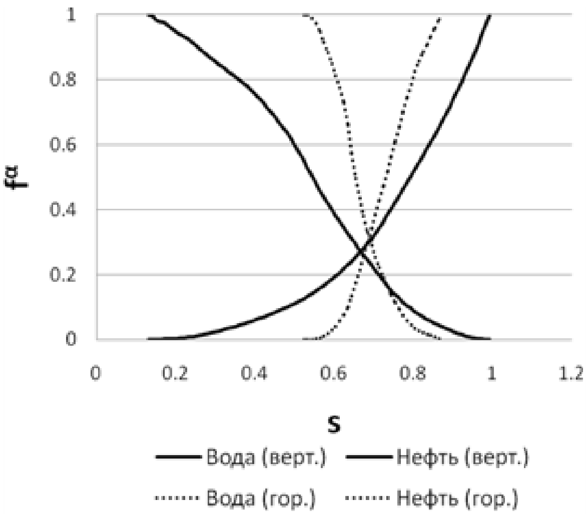

Рис. 7. Относительные фазовые проницаемости для нефти и воды, см. текст

Полученные кривые качественно согласуются с экспериментами [12, 13] и с теоретическим анализом [14, 15], в частности подтверждается тот факт, что направлению с бóльшим значением абсолютной проницаемости соответствует большее значение относительной фазовой проницаемости.

Заключение

Главным преимуществом однофазной модели Стокса–Бринкмана является единообразное описание течения как для пористого коллектора, так и для пустот, включающих каверны и трещины различных масштабов. Предложено обобщение данной модели на двухфазный случай. Такой подход позволяет, в первую очередь, существенно упростить численные расчеты из-за отсутствия необходимости задания дополнительных условий на границе раздела пористой зоны и зоны свободного течения.

Поскольку проведение численных расчетов на уровне подробного масштаба среды требует большого объема вычислительных ресурсов и может занять продолжительное время, в работе описывается процедура ремасштабирования – перехода от подробных расчетных сеток к грубым. Данная процедура позволяет получить эффективные значения тензора абсолютной проницаемости, относительных проницаемостей, давления и скорости для грубого масштаба среды, с учетом мелкомасштабных особенностей исходного образца породы.

На тестовых примерах продемонстрированы результаты работы процедуры ремасштабирования для случайно-равномерного и анизотропного пространственного распределения каверн. Эффективные алгоритмы ремасштабирования позволяют корректно использовать детализированный анализ образцов керна для задания макроскопических параметров гидродинамической модели, таких, как абсолютная и фазовая проницаемости. Отдельно отметим, что данные алгоритмы хорошо работают для описания свойств анизотропных сред, а симметричность полученных тензоров является подтверждением их физической корректности. Корректный учет неоднородности пластов (трещины, каверны) позволит значительно повысить качество гидродинамических моделей, а также достоверность создаваемых на их основе проектов разработки месторождений углеводородов.

Кроме того, предложенные в работе подходы позволяют существенно сократить время расчета гидродинамической модели вследствие использования более грубых расчетных сеток с сохранением требуемой точности и качества решения. На практике это позволяет существенно ускорить процесс адаптации гидродинамической модели, когда требуется проводить многочисленные серии расчетов.

Уже на данном этапе выполнения работ по настоящему проекту можно с уверенностью говорить о хороших перспективах использования представленных алгоритмов в основе коммерческих программных продуктов, ориентированных на гидродинамические расчеты месторождений углеводородов и моделирование лабораторных экспериментов на образцах керна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Popov P., Efendiev Ya., Qin G.* Multiscale Modeling and Simulations of Flows in Naturally Fractured Karst Reservoirs // Commun. Comput. Phys. 2009. 6, 1, 162–184.

2. *Hornung U.* Homogenization and porous media // Interdisciplinary Applied Mathematics. New York, Springer, 1997. 6.

3. *Beavers G. & Joseph D.* // Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall, 1967. 30, 197.

4. *Saffman P.* On the boundary condition at the surface of a porous medium // Studies appl. Math. 1971. 50, 93.

5. *Jaeger W. & Mikelic A.* On the interface boundary condition of Beavers, Joseph and Saffman // SIAM J. Appl. Math. 2000. 60, 1111.

6. *Arbogast T. & Lehr H.L.* Homogenization of a Darcy-Stokes system modeling vuggy porous media // Comput. Geosci. 2006. 10, 291.

7. *Brinkman H.C.* A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles // Applied Scientific Research Section A-Mechanics Heat Chemical Engineering Mathematical Methods 1947. 1, 27.

8. *Hirt C.W., Nichols B.D.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, Journal of Computational Physics. 1981. 39 (1): 201–225.

9. *Eckhardt B., Buehrle J.* Time-dependent effects in high viscosity fluid dynamics // The European Physical Journal Special Topics. 2008. 157 (1): 135–148.

10. *Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.* A continuum method for modeling surface tension // Journal of Computational Physics. 1992. 100 (2): 335–354.

11. *Coats K.H., Nielsen R.L., Terhune M.H., Weber A.G.* Simulation of three-dimensional two-phase flow in oil and gas reservoirs // SPE J. 1967. Vol. 7. № 12. P. 377–388.

12. *Рассохин С.Г.* Влияние анизотропии пористой среды на процессы фильтрации углеводородов // Актуальные проблемы освоения, разработки и эксплуатации месторождений природного газа. М.: ВНИИГАЗ, 2003. С. 74–83.

13. *Рассохин С.Г.* Относительные фазовые проницаемости при фильтрации углеводородов в гидрофильном и гидрофобном керне // Актуальные проблемы освоения, разработки и эксплуатации месторождений природного газа. М.: ВНИИГАЗ, 2003. С. 50–64.

14. *Дмитриев Н.М., Максимов В.М.* Определяющие уравнения двухфазной фильтрации в анизотропных пористых средах // Изв. РАН. 1998. № 2. С. 87–94.

15. *Дмитриев М.Н., Дмитриев Н.М., Масленников В.В.* К представлению функций относительных фазовых проницаемостей для анизотропных пористых сред // Изв. РАН. 2005. № 3. С. 118–125.