ДВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОРГАНИЗАЦИИ ГОСУДАРСТВЕННО-ЧАСТНОГО ПАРТНЕРСТВА В СФЕРЕ РАЗРАБОТКИ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ

Ф.Т. Алескеров, А.С. Беленький, С.Н.Васильев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
e-mail: alesk@ipu.ru, abelenky@ipu.ru, snv@ipu.ru

Введение

Настоящая статья выполнена в рамках исследований по Программе № 27 Президиума РАН, которые проводятся в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

В предыдущих публикациях авторов по этой теме [1–3] основное внимание было сконцентрировано на гармонизации интересов государства и бизнеса при назначении платежей за экологические загрязнения и на построении эффективных механизмов финансирования утилизации нефтяного попутного газа (НПГ), представляющих интерес как для частных компаний, работающих в сфере добычи и транспортировки нефти, так и для государства в целом. В этих публикациях описаны экономический механизм рационального назначения платежей и модель распределения платежей за объекты общего пользования при утилизации НПГ. При этом предполагалось, что финансирование соответствующих проектов осуществляется либо государством, либо частными компаниями.

На определенном этапе этих работ стало понятным, что целесообразно рассмотреть задачу построения механизмов взаимодействия государства и частного сектора экономики в ситуациях, когда интересующий государство набор проектов не может быть полностью профинансирован ни государством, ни частным бизнесом отдельно. Такие механизмы могли бы использоваться, например, при решении широкого круга задач эффективного использования природных ресурсов при освоении месторождений полезных ископаемых и отходов горно-обогатительных и металлургических производств, в рамках партнерства частных компаний и государства, в частности, в рамках государственно-частного партнерства, по финансированию и разработке возникающих там проектов. Рассмотрению двух таких конкретных механизмов, разработанных как часть указанных выше исследований по построению и анализу оптимальных схем финансирования крупномасштабных проектов, и посвящена настоящая работа.

Проблемы государственно-частного партнерства вообще принадлежат к числу активно изучаемых в экономике, поскольку они охватывают целый спектр прикладных, взаимосвязанных направлений как в микро- и макроэкономике, так и в построении эффективных экономических механизмов [4]. Они также представляют интерес для прикладной математики, поскольку их формализация основана на аппарате математической теории игр и способствует его развитию. Хорошо известно, что интересы государственного и частного секторов экономики любой страны не всегда (и не обязательно) совпадают и государственно-частное партнерство по существу представляет собой некоторый экономический механизм гармонизации интересов этих двух секторов экономики [1], [5]. Такая гармонизация необходима, в частности, тогда, когда государство заинтересовано в выполнении набора проектов, которые оно не может профинансировать полностью или даже частично, а частный бизнес, который мог бы профинансировать эти проекты либо полностью, либо совместно с государством, нуждается в таких условиях инвестирования в проекты из этого набора, которые либо были бы для него не менее выгодны на краткосрочную перспективу, чем какое-либо другое размещение капитала, либо отвечали бы его долгосрочным стратегическим интересам.

Подавляющее большинство научных исследований в области государственно-частного партнерства связано с выяснением того, как

а) создать конкретную форму такого партнерства между конкретными потенциальными партнерами с целью максимизации общественной полезности, например, в смысле оптимального использования выделяемых государством финансовых ресурсов на выполнение какого-либо набора крупномасштабных проектов, предоставляющих интерес для государства (если, конечно, государство может выделить такие ресурсы в рамках государственно-частного партнерства),

б) распределить финансовые ресурсы, принадлежащие партнерству, между теми организациями и компаниями, которые имеют хорошую репутацию в области разработки и реализации подобных проектов, и теми, которые могут успешно эксплуатировать подлежащие созданию (в результате этого партнерства) объекты и системы (по крайней мере), в течение некоторого периода времени T^*, достаточного для получения дохода от их функционирования, например, в объеме, позволяющем государству «расплатиться» со всеми другими участниками партнерства (если это предусмотрено заключенными между партнерами договорами).

При этом заведомо предполагается, что такое партнерство между конкретными потенциальными партнерами возможно.

Однако возникает вопрос: а всегда ли государственно-частное партнерство с конкретными организациями и компаниями может быть сформировано в принципе, исходя из условий партнерства, которые государство может предложить частному сектору, и из возможностей по размещению капитала, которые частный сектор имеет как на текущий момент, так и в долгосрочной перспективе [5], [6]?

В настоящей работе изложены результаты исследования двух конкретных проблем организации государственно-частного партнерства, связанные с этим вопросом.

Первая проблема возникает в ситуациях, когда государство, заинтересованное в выполнении нескольких проектов, не может обеспечить их финансирование (полностью или частично), но может предложить частному бизнесу условия возмещения затрат и получение прибыли от эксплуатации объектов, которые будут функционировать в результате выполнения этих проектов. При этом государство привлекает к партнерству как инвесторов (финансирующих проекты), так и компании, занимающиеся разработкой проектов и эксплуатацией объектов, которые будут созданы в результате выполнения этих проектов.

Вторая проблема возникает в ситуациях, когда государство может финансировать все интересующие его проекты и намеревается объявить тендеры на выполнение каждого проекта, например, в рамках размещения контрактов на выполнение работ, определенных планом государственных закупок. В этом случае государство должно определить начальную (резервную) цену для каждого проекта, исходя как из собственных интересов и возможностей, так и из известных ему возможностей потенциальных исполнителей соответствующих контрактов (включая возможности потенциальных управляющих компаний по финансированию ими некоторых типов работ, связанных с эксплуатацией объектов, создаваемых в результате выполнения проектов, причем эти работы целесообразно было бы выполнить силами этих потенциальных управляющих компаний до начала эксплуатации соответствующих объектов). Необходимо, однако, заметить, что, хотя, формально, государственные закупки (по крайней мере, в России) не рассматриваются как атрибут государственно-частного партнерства, по своей сути они представляют собой некоторую форму партнерства между государством и исполнителем

каждого из контрактов, выставляемых на торги в форме конкурса или аукциона, и по этой причине подход к решению второй проблемы также рассматривается в настоящей работе.

Оказывается, что при достаточно естественных, проверяемых предположениях первая проблема может быть математически сформулирована в виде игры трех лиц на выпуклом многогранном множестве связанных стратегий игроков с платежными функциями игроков, являющихся линейными функциями трех векторных аргументов [5], в то время как вторая проблема может быть сформулирована в виде игры трех лиц на выпуклых многогранниках несвязанных стратегий игроков [6].

Для первой игры трех лиц (на множестве связанных игроков) строится вспомогательная игра двух лиц на том же самом множестве (связанных) стратегий игроков и показывается, что знание векторных компонент точки равновесия во вспомогательной игре позволяет сформировать точки равновесия в исходной игре. Тем самым устанавливаются достаточные условия равновесия в рассматриваемом классе игр трех лиц на выпуклом многограннике связанных стратегий игроков. Построен пример, показывающий, что эти достаточные условия не являются, однако, необходимыми [5].

Для игры, являющейся формализованным описанием второй проблемы (отыскания резервных цен на контракты, выставляемые на тендеры), в [6] предложены необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу, позволяющие отыскивать точки равновесия из решения задач линейного программирования, образующих двойственную пару.

1. Содержательные постановки и математические модели рассматриваемых проблем государственно-частного партнерства

Проблема 1. Государство заинтересовано в разработке и выполнении n проектов по созданию объектов, которые будут функционировать в результате выполнения этих проектов, и прилагает усилия для привлечения частного капитала, владелец которого был бы заинтересован в их совместном с государством финансировании. А именно: государство пытается убедить а) частного инвестора (далее – финансовую компанию) принять участие в финансировании проектов, б) управляющую компанию (например, строительную компанию) взять на себя разработку и выполнение проектов и, возможно, даже частично финансировать эти проекты. С этой целью государству необходимо предложить потенциальным партнерам некоторые финансово выгодные для них условия партнерства, например в форме отчисления им в течение некоторого периода времени

T^* части дохода, который ожидается получить от функционирования объектов (создаваемых в результате выполнения проектов). Как только выполнение проектов закончится, государство планирует провести тендеры на контракты за право эксплуатировать созданные объекты. Эти контракты будут оплачены из доли дохода, который будет сгенерирован выполненными проектами в течение периода времени T^* (что оговаривается в соответствующих контрактах), в течение которого государство планирует «расплатиться» со всеми другими участниками государственно-частного партнерства). По окончании периода времени T^*, государство может или продолжить получать часть дохода, генерируемого функционирующими объектами (или весь этот доход), или обеспечить поступление в бюджет части дохода от функционирования объектов посредством налогообложения новых владельцев функционирующих объектов (если эти объекты перейдут в собственность каких-либо заинтересованных частных компаний или физических лиц на выгодных для государства условиях) [5].

Пусть

$p_i > 0$ — требуемый (по оценке государства) объем финансирования по проекту i , $i \in \overline{1,n}$,

$0 \le x_i < p_i$ — объем финансирования проекта i, который государство может обеспечить,

$i \in \overline{1,n}$,

$q_i > 0$ — доход, который ожидается от функционирования объектов, которые будут созданы в результате выполнения проекта i, в течение периода времени T^*, $i \in \overline{1,n}$,

$z_i \ge 0$ — объем финансирования, который потребует управляющая компания (потенциальный партнер) для выполнения проекта *i*, $i \in \overline{1,n}$,

$u_i \ge 0$ — объем финансирования, который частный инвестор (потенциальный партнер) может предоставить для выполнения проекта *i*, $i \in \overline{1,n}$,

$c_i \ge 0$ — оценка государством минимального объема финансирования, который управляющая компания потребует для выполнения всех работ, связанных с проектом *i*, $i \in \overline{1,n}$,

η_i — (определяемый государством) коэффициент, отражающий долю дохода, ожидаемого от функционирования объектов (которые будут созданы в результате выполнения проекта i) в течение периода времени T^*, предлагаемую государством частному инвестору, $0 < \eta_i < 1$, $i \in \overline{1,n}$,

γ_i — (определяемый государством) коэффициент, отражающий долю дохода, ожидаемого от функционирования объектов (которые будут созданы в результате выполнения проекта i) в течение периода времени T^*, предлагаемую государством управляющей компании, $0 < \gamma_i < 1$, $i \in \overline{1,n}$,

$b > 0$ — суммарный объем финансирования, который инвестор может предложить для разработки и выполнения всех проектов,

$d \geq 0$— суммарный объем финансирования, который государство может предложить для разработки и выполнения всех проектов,

χ_i — коэффициент, определяющий дополнительный уровень расходов государства, которые могут быть связаны с финансированием проекта $i, i \in \overline{1,n}$ (например, потенциальные потери государства вследствие недостаточного или несвоевременного финансирования проектов), $0 \leq \chi_i \leq 1$, $i \in \overline{1,n}$,

$\pi_i > 0$— прирост капитала на единицу объема капитала, который частный инвестор может получить, размещая капитал, например, на финансовом рынке в течение периода времени, являющегося суммой времени, требуемого для выполнения проекта i, и времени T^*, $i \in \overline{1,n}$,

$\alpha_i > 0$— процент, определяющий уровень удовлетворения государством требований строительной компании по финансированию проекта $i, i \in \overline{1,n}$,

$\mu_i > 0$ — (ожидаемые государством) расходы, связанные с эксплуатацией объектов, которые должны функционировать в результате выполнения проекта $i, i \in \overline{1,n}$ в течение времени T^*.

Пусть

$$\beta_i = \frac{\eta_i}{p_i}, \Delta_i = \frac{\gamma_i}{p_i}, 0 < \gamma_i + \eta_i < 1, i \in \overline{1,n},.$$

Целевые функции всех потенциальных участников государственно-частного партнерства описываются следующими выражениями:

Прибыль государства к моменту окончания периода времени T^* :

$$\sum_{i=1}^{n}\left[q_i(1-\beta_i u_i-\gamma_i+\Delta_i z_i)-u_i-\alpha_i z_i-(1+\chi_i)x_i-\mu_i\right].$$

Прибыль финансовой организации к моменту окончания периода времени T^*:

$$\sum_{i=1}^{n}\{q_i\beta_i u_i-\pi_i u_i\}.$$

Доход управляющей компании к моменту окончания периода времени T^* *:*

$$\sum_{i=1}^{n}\{\alpha_i z_i+\gamma_i q_i-q_i\Delta_i z_i\}.$$

Предположение 1

Доля от дохода государства, которая должна быть получена управляющей компанией за разработку и выполнение проекта, должна зависеть от объема финансирования z_i, $i\in\overline{1,n}$, требуемого управляющей компанией, и эта зависимость описывается следующим соотношением:

$$\frac{p_i-z_i}{p_i}\gamma_i=\gamma_i-\Delta_i z_i.$$

(Реальные затраты управляющей компании на проект i, $i\in\overline{1,n}$, (если она соглашается выполнить этот проект), не обязательно совпадают с z_i и могут быть неизвестны государству.) Доход, ожидаемый от эксплуатации объектов (которые будут функционировать в результате выполнения проекта i, $i\in\overline{1,n}$) в течение периода времени T^*, достаточен как для покрытия возможных дополнительных, реальных расходов, связанных с эксплуатацией указанных объектов в течение этого периода времени, так и для выполнения связанных с этим проектом финансовых обязательств государства перед всеми участниками государственно-частного партнерства.

Предположение 2

Требования управляющей компании по финансированию проекта i описываются системой линейных неравенств:

$$p_i\ge z_i\ge c_i,\quad i\in\overline{1,n}.$$

Предположение 3

Весь объем финансирования, предоставляемый частным инвестором (финансовой компанией) государству в рамках партнерства, используется исключительно для покрытия расходов управляющей компании на разработку и выполнение проектов, по крайней мере, на (определяемом государством) минимальном уровне, а также для покрытия (ожидаемых государством) расходов, связанных с эксплуатацией объектов (которые будут функционировать в результате выполнения проектов) в течение времени T^*, так что выполняется неравенство

$$\sum_{i}^{n} u_i + \sum_{i}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \ .$$

2. Математические формулировки рассматриваемых проблем

Взаимодействие государства, частного инвестора и строительной компании может быть описано следующей игрой трех лиц:

Игра 1

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(q_i - \mu_i) - \sum_{i=1}^{n}(q_i\beta_i u_i + u_i) - \sum_{i=1}^{n} q_i\gamma_i + \sum_{i=1}^{n} q_i\Delta_i z_i - \\ \quad - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i - \sum_{i=1}^{n}(1+\chi_i)\, x_i \to \max_{(x_1,\dots,x_n)} \\ \sum_{i=1}^{n} q_i\beta_i u_i - \sum_{i=1}^{n} \pi_i u_i \to \max_{(u_1,\dots,u_n)} \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{n} q_i\gamma_i - \sum_{i=1}^{n} q_i\Delta_i z_i \to \max_{(z_1,\dots,z_n)} \\ p_i \geq z_i \geq c_i,\ i \in \overline{1,n}, \\ u_i \leq p_i,\ i \in \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} u_i \leq b, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq d, \\ \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i. \end{cases}$$

Пусть

$$q_i\beta_i = \theta_i$$

$$q_i\Delta_i = \nabla_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} q_i\gamma_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i = a$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\gamma_i = g$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = r$$

Пусть далее

$\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$; $\nabla = (\nabla_1,\ldots,\nabla_n)$; $c = (c_1,\ldots,c_n)$; $p = (p_1,\ldots,p_n)$; $x = (x_1,\ldots,x_n)$;

$u = (u_1,\ldots,u_n)$; $z = (z_1,\ldots,z_n)$; $\chi = (1+\chi_1,\ldots,1+\chi_n)$; $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$; и пусть

$\varepsilon = (1,\ldots,1)$; $\nu = (\pi_1,\ldots,\pi_n)$ векторы из R_+^n, а E – единичная $n\times n$ матрица.

Игра 1 может быть переписана в векторно-матричной форме:

Игра 2

$$\begin{cases} a - \langle \theta + \epsilon, u\rangle + \langle \nabla, z\rangle - \langle \alpha, z\rangle - \langle \chi, x\rangle \to \max\limits_{x} \\ \langle \theta, u\rangle - \langle \nu, u\rangle \to \max\limits_{u} \\ g + \langle \alpha, z\rangle - \langle \nabla, z\rangle \to \max\limits_{z} \\ Ez \geq c \\ Ez \leq p \\ Eu \leq p \\ \langle \epsilon, u\rangle \leq b \\ \langle \epsilon, x\rangle \leq d \\ \langle \epsilon, u\rangle + \langle \epsilon, x\rangle - \langle \alpha, z\rangle \geq r \\ u \geq 0, x \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

Пусть теперь $(\theta+\varepsilon, -\nabla+\alpha) = \omega$, $(u,z) = w$, $\theta - \nu = \sigma$; $\nabla - \alpha = \tau$. Тогда Игра 2 может быть переписана в виде

Игра 2а

$$\begin{cases} a - \langle \omega, w\rangle - \langle \chi, x\rangle \to \max\limits_{x} \\ \langle (\sigma, 0), w\rangle \to \max\limits_{w} \\ g - \langle (0, \tau), w\rangle \to \max\limits_{w} \\ Aw + Bx \geq h \end{cases}$$

где A, B и h – матрицы и вектор соответствующих размеров, элементы которых образованы единицами, нулями, соответствующими координатами векторов c, p и числами b, d, r.

Далее рассмотрим Игру 3.

Игра 3

$$\begin{cases} a - \langle \omega, w \rangle - \langle \chi, x \rangle \to \max\limits_{x} \\ g - \langle (0, \tau), w \rangle + \langle (\sigma, 0), w \rangle \to \max\limits_{w} \\ Aw + Bx \geq h \end{cases}$$

Принимая во внимание структуру вектора w, который описывается равенством $w = (u, z)$, можно сформулировать следующее очевидное утверждение:

Утверждение 1

Тройка векторов (u^*, z^*, x^*) является точкой равновесия в Игре 2 тогда и только тогда, когда пара векторов (w^*, x^*) является точкой равновесия в Игре 2а.

Утверждение 2 (достаточное условие равновесия в Игре 2а) [5].

Каждая пара векторов (w^*, x^*), которая образует точку равновесия в Игре 3, является точкой равновесия в Игре 2а.

<u>Проблема 2.</u> Государство имеет средства для финансирования n проектов и рассматривает несколько потенциальных кандидатов для разработки и выполнения каждого проекта (управляющие компании), а также потенциальных кандидатов для эксплуатации объектов, которые будут функционировать в результате выполнения проектов (эксплуатационные компании). Государство стремится выбрать наилучшего партнера для разработки и выполнения каждого проекта, а также для эксплуатации объектов, которые должны функционировать в результате выполнения проектов, или наилучшую пару партнеров (если для каждого проекта выполнение проекта и эксплуатация объектов, связанных с этим проектом, должны быть реализованы разными организациями). При этом наилучший партнер понимается в смысле ожидаемых затрат, которые государство понесет, если этот партнер или пара партнеров выиграют контракт (или контракты) на разработку и выполнение каждого проекта, а также на эксплуатацию указанных объектов. Оценки этих затрат могут помочь определить начальные цены в конкурсных процедурах, которые могут (или должны) быть проведены органами государственного управления, действующими от лица государства, с целью определения

победителя (или победителей), которым будут присуждены соответствующие контракты [6].

Пусть

n – число проектов, которые государство намеревается разработать и выполнить в течение некоторого периода T,

y_i – объем работ, который должен быть выполнен в рамках разработки и реализации проекта $i, i \in \overline{1,n}$,

x_i – стоимость «единицы объема» работ, связанных с разработкой и выполнением проекта $i, i \in \overline{1,n}$,

u_i – стоимость «единицы объема» работ, связанных с эксплуатацией объектов, функционирующих в результате выполнения проекта $i, i \in \overline{1,n}$, подлежащих финансированию государством,

k – доля государственных затрат на управляющую компанию, связанных с эксплуатацией тех объектов, которые будут функционировать в результате выполнения каждого из проектов,

b_i – объем работ, подлежащих выполнению государством в связи с разработкой и выполнением проекта $i, i \in \overline{1,n}$ по созданию объектов, которые будут функционировать в результате выполнения этих проектов,

ω_i – потери государства, связанные с недовыполнением «единицы объема» работ, связанных с разработкой и выполнением проекта i в объемах, определенных числами $b_i, i \in \overline{1,n}$,

γ_i – стоимость «единицы объема» работ, связанных с эксплуатацией объектов, которые будут функционировать в результате выполнения проекта $i, i \in \overline{1,n}$, таких, что эти работы целесообразно выполнить силами управляющей компании (согласной их финансировать) до начала эксплуатации проектов,

θ_i – доход, который эксплуатационная компания получит от эксплуатации объектов в результате выполнения проекта i и который связан с «единицей объема» работ, проведенных по разработке и выполнению проекта $i, i \in \overline{1,n}$.

Пусть

$y=(y_1,\ldots,y_n)$; $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $u=(u_1,\ldots,u_n)$; $b=(b_1,\ldots,b_n)$; $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$; $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$; $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ – векторы из R^n и пусть $y\in\Omega$, $x\in M$, $u\in H$, где Ω, M, H – выпуклые многогранники в R^n, описываемые совместными системами линейных неравенств.

Представляется естественным предположить, что если бы государство должно было иметь дело только с одним (воображаемым) партнером по разработке и выполнению всех проектов и только с одним (воображаемым) партнером по эксплуатации объектов, которые должны функционировать в результате выполнения проектов, без проведения каких бы то ни было тендеров, то взаимодействие государства и двух потенциальных (воображаемых) партнеров описывалось бы игрой трех лиц с платежными функциями.

Игра 4

$$f_1(x,y,u)=\langle y,x\rangle+\langle y,u\rangle+\langle \omega,b-y\rangle\to\min_{y\in\Omega},$$

$$f_2(x,y,u)=\langle y,x\rangle+k\langle y,u\rangle-\langle \gamma,y\rangle\to\max_{x\in M},$$

$$f_3(x,y,u)=(1-k)\langle y,u\rangle+\langle \theta,y\rangle\to\max_{u\in H},$$

и в этой игре государство пыталось бы найти точку равновесия. Поэтому представляется целесообразным установить начальные (резервные) цены контрактов на разработку и выполнение проектов и на эксплуатацию объектов, которые должны функционировать в результате выполнения проектов, на значениях, которые являются равновесными в Игре 4, или, по крайней мере, принять эти значения во внимание при установлении резервных цен [6].

3. Основные результаты

Рассмотрим игру трех лиц на выпуклом многогранном множестве связанных стратегий

$$S=\{(x,y)\geq 0: Kx+Ly\geq h\}$$

с платежной функцией

$$\phi(x,y)=\langle p,x\rangle+\langle q,y\rangle.$$

где *p, q, x, y, h* – векторы и *K, L* – матрицы соответствующих размеров. Пара векторов (x^*, y^*) называется точкой равновесия в этой игре, если выполняются неравенства [7]

$$\phi(x^*,y)\leq\phi(x^*,y^*)\leq\phi(x,y^*),\ \forall(x^*,y)\in S,\ \forall(x,y^*)\in S.$$

Эта игра также может быть переписана в виде

$$(x^*, y^*) \in Ep_{(x,y)\in S}\{\langle p, x\rangle + \langle q, y\rangle\},$$

$$S = \{(x, y) \geq 0 : Kx + Ly \geq h\},$$

где $Ep_{(x,y)\in S}\{\langle p, x\rangle + \langle q, y\rangle\}$ — множество точек равновесия в этой Игре.

Рассмотрим Проблему 1.

Утверждение 3

Пара векторов (w^*, x^*) является точкой равновесия в Игре 3 тогда и только тогда, когда она является точкой равновесия в Игре 5.

Игра 5

$\langle \omega, w\rangle + \langle \chi, x\rangle \to \min\limits_{x}$,

$\langle \zeta, w\rangle \to \max\limits_{w}$,

$Aw + Bx \geq h$,

где $\zeta = (\sigma, -\tau)$.

Далее рассмотрим игру двух лиц с платежной функцией $\langle \zeta, w\rangle + \langle \chi, x\rangle$. максимизируемой по векторной переменной w и минимизируемой по векторной переменной x.

Игра 6

$(w^*, x^*) \in Ep_{(w,x)\in T}\{\langle \zeta, w\rangle + \langle \chi, x\rangle\}$,

$T = \{(w, x) \geq 0 : Aw + Bx \geq h\}$,

где $Ep_{(w,x)\in T}\{\langle \zeta, w\rangle + \langle \chi, x\rangle\}$ является множеством точек равновесия в Игре 6.

Теорема 1 [5]. Пара векторов (w^*, x^*) является точкой равновесия в Игре 5 тогда и только тогда, когда (w^*, x^*) является точкой равновесия в Игре 6.

Игра 6 является частным случаем игры на выпуклом многогранном множестве связанных стратегий игроков вида

Игра 7

$\langle p, x\rangle + \langle x, Dy\rangle + \langle q, y\rangle$

$S = \{(x, y) \geq 0 : Gx + Fy \geq d\}$,

где p, q, x, y, d – векторы и G, F, D – матрицы соответствующих структуры и размеров.

Отыскание равновесий в этой игре помогает отыскивать равновесия в Игре 1.

Как показано в [7], Игра 7 разрешима тогда и только тогда, когда система линейных неравенств и двух квадратичных равенств вида

$$Th \geq \delta$$

$$\langle h, H_1 h \rangle + \langle \rho, h \rangle = 0$$

$$\langle h, H_2 h \rangle + \langle \rho, h \rangle = 0,$$

где $T - m \times n$ — матрица, $H_1, H_2 - n \times n -$ симметричные квадратные матрицы, $\rho \in R^n$, $\delta \in R^m$ и $h \in R^n_+$ – векторы, связанные с матрицами *G, F, D* и с векторами p, q и *d*, имеет решение.

Легко убедиться в том, что необходимые и достаточные условия равновесия в Игре 7, предложенные в [7], позволяют свести отыскание равновесий в разрешимых играх такого вида к отысканию экстремумов в так называемых квадратичных оптимизационных задачах [8]:

$$K_0 \to \inf_{h \in M \subset R^n},$$

$$K_i \leq 0, i \in I, K_j = 0, j \in J, I \cap J = \varnothing,$$

$$K_\nu = \langle A_\nu, h \rangle + \langle I_\nu, h \rangle + c_\nu,$$

где A_ν – это симметричные матрицы, $n \times n -$ квадратные матрицы, I_ν – векторы из R^n, c_ν – некоторые константы, $\nu \in \{0\} \cup I \cup J, I, J \subset N$, $N -$ множество натуральных чисел и M – или выпуклое многогранное множество в R^n, или все пространство R^n.

Эффективные методы решения квадратичных оптимизационных задач, использующие идеи методов недифференцируемой оптимизации, предложены в [8].

Теорема 2 [6], [9]. Тройка векторов (y^*, u^*, x^*) является точкой равновесия Нэша в Игре 4 тогда и только тогда, когда пара векторов $(y^*, (u^*, x^*))$ является седловой точкой во вспомогательной антагонистической Игре 8 игроков A и B

Игра 8

$$\langle y, x \rangle + \langle y, u \rangle - \langle \omega, y \rangle$$

на множестве стратегий Ω (для игрока A) и $H \times M$ (для игрока B) с платежной функцией $\langle y, x \rangle + \langle y, u \rangle - \langle \omega, y \rangle$.

Полагая $\widetilde{y} = (u, x), \widetilde{x} = y, \widetilde{p} = -\omega$, $\widetilde{q} = 0$ и $\widetilde{D} = (\frac{E}{E})$, где E – единичная матрица соответствующих размеров, легко убедиться в том, что Игра 8 является частным случаем антагонистической Игры 9

Игра 9

$$\langle \widetilde{p}, \widetilde{x} \rangle + \langle \widetilde{y}, \widetilde{D}\widetilde{x} \rangle + \langle \widetilde{q}, \widetilde{y} \rangle$$

на выпуклых многогранных множествах $\widetilde{M}, \widetilde{\Omega}$, где $\widetilde{M}, \widetilde{\Omega}$ описываются совместными системами линейных неравенств вида:

$$\widetilde{M} = \{\widetilde{x} \in R_+^m : \widetilde{A}\widetilde{x} \geq \widetilde{b}\}$$

$$\widetilde{\Omega} = \{\widetilde{y} \in R_+^n : \widetilde{B}\widetilde{y} \geq \widetilde{d}\}$$

и $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{D}$ – матрицы, $\widetilde{b}, \widetilde{d}, \widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{x}, \widetilde{y}$ — векторы соответствующих размеров.

Разрешимость Игры 9 эквивалентна разрешимости задач линейного программирования

$$\langle \widetilde{b}, z \rangle + \langle \widetilde{q}, \widetilde{y} \rangle \to \max_{(z, \widetilde{y}) \in Q},$$

$$\langle -\widetilde{d}, t \rangle + \langle \widetilde{p}, \widetilde{x} \rangle \to \min_{(t, \widetilde{x}) \in P},$$

образующих двойственную пару [10], где

$$Q = \{(z, \widetilde{y}) \geq 0 : z\widetilde{A} \leq \widetilde{p} + \widetilde{D}\widetilde{y}, \widetilde{B}\widetilde{y} \geq \widetilde{d}\},$$

$$P = \{(t, \widetilde{x}) \geq 0 : t\widetilde{B} \leq -\widetilde{q} - \widetilde{x}\widetilde{D}, \widetilde{A}\widetilde{x} \geq \widetilde{b}\}$$

и t, z – векторы соответствующих размеров, что позволяет отыскивать точки равновесия в разрешимой Игре 9 конечными методами.

Заключение

В статье рассмотрены два механизма партнерства государства и частного сектора, которые могут стать инструментальной основой для выработки целенаправленной политики государства по привлечению частных компаний для эффективного использования природных ресурсов при освоении месторождений полезных ископаемых и отходов горно-обогатительных и металлургических производств.

Структура каждого из этих механизмов подразумевает присутствие математических моделей, описывающих взаимодействие государства и потенциальных партнеров в форме игр трех лиц на выпуклых многогранных множествах связанных (для

Проблемы 1) и несвязанных (для Проблемы 2) стратегий игроков с платежными функциями, являющимися или линейными функциями векторных переменных из указанных выпуклых многогранных множеств, или суммой билинейной и линейных функций этих векторных переменных. Выпуклые многогранные множества в рассмотренных играх трех лиц образованы линейными ограничениями балансового типа на производственные и финансовые возможности каждого из участников потенциального партнерства (игрока), которые эти участники могут предложить партнерству, а их функции выигрыша суть доходы или прибыль (или, возможно, только затраты для государства), на которые каждый из участников может рассчитывать (или которые государству следует ожидать) в рамках партнерства (если оно, разумеется, состоится). При этом в результате решения игр находятся равновесные (по Нэшу) стратегии игроков – конкретные режимы работы управляющей компании и конкретные объемы финансирования проектов финансовой компанией и государством (для Проблемы 1) и конкретные режимы работы управляющей компании и эксплуатационной компании и конкретные объемы финансирования проектов государством и управляющей компанией, определяющие начальные цены контрактов, выставляемых на тендер (для Проблемы 2), которых всем игрокам выгодно придерживаться – и соответствующие этим стратегиям выигрыши игроков. Здесь выгодность понимается в том смысле, что любое отклонение какого-либо из трех игроков от своей равновесной стратегии (т.е. от «равновесных» режимов работы или от «равновесных» объемов финансирования), при условии, что другие игроки придерживаются своих равновесных стратегий (равновесных режимов работы или равновесных объемов финансирования), может привести лишь к снижению дохода этого «отклоняющегося» игрока (или лишь к увеличению затрат государства, если государство как игрок не может обеспечить себе дохода в случае конкретных проектов).

Для предложенных механизмов, которые имеют форму игр трех лиц, найдены условия равновесия в этих играх, позволяющие отыскивать эти равновесия известными методами оптимизации. В заключение заметим, что предложенные достаточные условия равновесия в Игре 2а применимы к отысканию равновесия и в более сложных случаях Игры 2а, в частности, в тех, в которых вектор ω принадлежит некоторому выпуклому многограннику, и функция выигрыша первого игрока является суммой билинейной и двух линейных функций. В то же время для Игры 2а могут быть предложены и другие проверяемые достаточные условия равновесия [9].

Таким образом, предложенный игровой подход позволяет иначе взглянуть на задачу гармонизации интересов государства и частных компаний, впервые поставленную в [1], при решении проблемы эффективного использования природных ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев С.Н.* Гармонизация интересов сторон при платежах предприятий за загрязнение // Моделирование и управление процессами регионального развития. М., 2001. С. 16–27.
2. *Васильев С.Н., Алескеров Ф.Т., Иванов А.А., Якуба В.И.* Механизмы принятия экономических решений для утилизации нефтяного попутного газа // Пробл. управления. 2012. № 4. С. 18–25.
3. *Гусев В.Б., Пащенко Ф.Ф., Цвиркун А.Д., Васильев С.Н., Макаров А.А., Пирузян Л.А., Воропай Н.И., Данилов-Данильян В.И., Новиков Д.А., Суслов В.И., Алескеров Ф.Т., Баренбойм Г.М., Буравлев А.И., Бурков В.Н., Горчица А.И., Лившиц В.Н., Сорокин Л.Р., Трахтенгерц Э.А., Ядыкин И.Б., Гончаренко С.С., Горошникова Т.А., Губко М.В., Затуливетер Ю.С., Степановская И.А., Фищенко Е.А.* Управление развитием крупномасштабных систем. М.: Физматлит, 2012. 494 с.
4. *Maskin E, Tirole J.* Public-private partnerships and government spending limits // Intern. J. Industr. Org. 2008; 26(2):412-420.
5. *Беленький А.С.* Разрешимость игры трех лиц на множестве связанных стратегий игроков и оценка возможности формирования государственно-частного партнерства для выполнения крупномасштабных проекто // Труды Всероссийского совещания по проблемам управления, Москва, 16–19 июня 2014 г. / Институт Проблем Управления РАН. М., 2014.
6. *Belenky A.* Three quantitative management problems in public procurement and decision procedures for their analysis and solving // Procedia Comput. Sci. 2013. Vol. 17. P. 1142–1153.
7. *Belenky A.* A 2-person game on a polyhedral set of connected strategies // Math. Comput. Model. 1997. Vol. 33, № 6. P. 99–125.
8. *Shor N.* Quadratic optimization problems // Sov. J. Comput. System Sci. (formerly: Engineering Cybernetics). 1987. Vol. 6. P. 1–11.

9. *Belenky A.* Application of continuous optimization techniques for calculating equilibriums in large-scale three-person public procurement games // International Conference on Continuous Optimization, July 27 – August 1, 2013, Lisbon, Portugal: abstracts. Lisbon, 2013. P. 28.
10. *Belenky A.* Operations research in transportation systems: ideas and schemes of optimization methods for strategic planning and operations management. Boston etc.: Springer, 2010. 440 p.