УРАВНЕНИЯ ГЛУБОКОЙ КОНВЕКЦИИ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТЕРМИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ПОЛИТРОПНОЙ МОДЕЛИ МАНТИИ ЗЕМЛИ

Г. С. Голицын[1], А. Н. Вульфсон[2]
1 – Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
2 – Институт проблем нефти и газа РАН
e-mail: golitsyn@ifaran.ru, vulfson@ipng.ru

Согласно геофизическим исследованиям [1], мантия Земли находится в режиме тепловой конвекции уже более четырех миллиардов лет, поэтому уравнения Буссинеска активно используются и при описании глубинных динамических процессов (см., например, [2]). При этом конвекция в мантии Земли может реализовываться как в глобальной форме, циркулирующей во всей мантии [3], так и в двухъярусной, расслоенной форме, циркулирующей отдельно в верхней и нижней мантиях в соответствии с [4, 5].

Классическая форма уравнений конвекции Буссинеска была обоснована для динамически несжимаемых жидкостей, т.е. для жидкостей в уравнениях состояния которых плотность изменяется только в зависимости от температуры [6, 7]. В более поздних исследованиях [8, 9] обоснование уравнений теории конвекции было получено также и для идеальных газов. Таким образом, упомянутые исследования обеспечивают корректное использование уравнений конвекции для атмосферы и гидросферы, но не для мантии Земли.

Существенно, что термодинамическое состояние земных недр характеризуется областью высоких температур и давлений. В таком диапазоне термодинамических параметров модели уравнения состояния несжимаемой жидкости и идеального газа становятся непригодными, поэтому вопрос об обосновании использования уравнений теории конвекции при описании мантийных процессов с теоретической точки зрения в известной мере остается открытым. Более того, при описании глобальной формы движения, пронизывающей всю толщу мантии, целесообразно использовать не уравнения Буссинеска, а уравнения глубокой конвекции.

В настоящем исследовании предложено обоснование системы уравнений Буссинеска для широкого класса уравнений состояния жидкости в области высоких давлений и докритических температур, термодинамические свойства которого позволяют построить гидродинамическую модель политропной мантии. В рамках модели политропной мантии удается обосновать консервативный вариант уравнений как мелкой, так и глубокой конвекции. Предложенная система уравнений конвекции имеет квазинесжимаемую форму, идентичную форме системы уравнений [3] и естественно обобщающую систему уравнений мелкой конвекции Буссинеска в форме [2]. Последнее обстоятельство является весьма существенным, т.к. обеспечивает сохранение всей системы безразмерных параметров, характеризующих мелкую конвекцию Буссинеска. Безусловным достоинством предложенного варианта уравнения глубокой конвекции является его полная консервативность, т.е. в отсутствие диссипации в объеме с теплоизолированными границами будут сохраняться энергия, энтропия и импульс, что позволяет исследовать энергетику глобальных мантийных процессов в недрах Земли [10].

Далее будет рассмотрен класс сплошных сред, удовлетворяющих в области высоких давлений и докритических температур достаточно общему уравнению состояния

$$v(T,p) = v_0\left(T/T_0\right)^{\alpha_*} X\left(p/p_0\right), \tag{1}$$

где v, T, p – удельный объем, температура и давление; v_0, T_0, p_0 – постоянные значения удельного объема, температуры и давления, характеризующие уравнение состояния; $X\left(p/p_0\right) > 0$ – произвольная монотонно убывающая функция давления; $\alpha_* << 1$ – безразмерный параметр, характеризующий изобарическое тепловое расширение среды.

Уравнения состояния (1) с различными коэффициентами α_* могут быть эффективно использованы как для отдельного описания верхней и нижней мантий, имеющих химически однородный состав, так и для всей мантии в целом при усредненном значении α_*.

Показано, что система уравнений глубокой конвекции, включающая массовый источник тепла, а также эффекты вязкости и теплопроводности в анизотропном виде, имеет вид, подобный приведенному в [11]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}\Phi + \nu\vec{\nabla}^2\vec{u} + \dfrac{\nu}{\bar{\rho}_*}\dfrac{\partial}{\partial z}\bar{\rho}_*\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial z}, \quad \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\partial}{\partial z}\Phi + g\alpha_*\dfrac{\Theta'}{\Theta_a} + \nu\vec{\nabla}^2 w + \dfrac{\nu}{\bar{\rho}_*}\dfrac{\partial}{\partial z}\bar{\rho}_*\dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{d}{dt}\Theta' = k\vec{\nabla}^2\Theta + \dfrac{k}{\bar{\rho}_*}\dfrac{\partial}{\partial z}\bar{\rho}_*\dfrac{\partial}{\partial z}\Theta + \dfrac{1}{c_p}q, \quad \vec{\nabla}\bar{\rho}_*\vec{u} + \dfrac{\partial\bar{\rho}_* w}{\partial z} = 0 \\ -\dfrac{1}{\bar{\rho}_*}\dfrac{d\bar{\rho}_*}{dz} = \sigma = \mathrm{const}, \quad \bar{\rho}_*\left(z_0\right) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

В этой модели $\bar{\rho}_*(z)$ – безразмерная адиабатическая плотность неподвижной среды, экспоненциально возрастающая с глубиной; $\sigma = \mathrm{const} > 0$ – фоновая сжимаемость среды; ν = const, k = const – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, соответственно; $q = q(z)$ – мощность массового источника тепла; c_p = const – удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении; $\overset{1}{\nabla}^2$ – горизонтальный оператор Лапласа.

Уравнения (2) рассматриваются в прямоугольном параллелепипеде. На вертикальных границах области Ω примем условия периодичности. На горизонтальных границах области Ω примем условие прилипания для скорости $\overset{1}{u} = 0, \quad w = 0$ и условия постоянности потенциальных температур $\Theta(z_0) = \overline{\Theta}_0$; $\Theta(z_d) = \overline{\Theta}_d$.

Уравнения глубокой конвекции, включающие систему безразмерных параметров, идентичную системе параметров мелкой конвекции Буссинеска, а также обладающие свойством полной консервативности, могут найти широкие приложения в задачах моделирования конвекции, классификации геофизических течений, динамики литосферных плит, энергетики верхней мантии и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McKenzie D. P., Weiss N. O.* Speculation on the thermal and tectonic history of the Earth // Geophys J. R. Astron. Soc. 1975. Vol. 48. P. 131 – 174.

2. *Добрецов Н. А., Кирдяшкин А. Г., Кирдяшкин А. А.* Глубинная геодинамика. //Новосибирск: Изд-во СО РАН: Геос, 2001. 409 с.

3. *Machetel P., Weber P.* Intermittent layer convection in a model mantle with an endothermic phase change at 670 km // Nature. 1991. Vol. 350. P. 55–57.

4. *Honda S. A.* Simple parameterized model of Earth's thermal history with the transition from layered to whole mantle convection // Earth Planet. Sci. Lett. 1995. Vol. 131. P. 357 – 369.

5. *Трубицын В. П.* Геодинамическая модель эволюции Тихого океана // Изв. РАН. Физика Земли. 2006. Т. 42, № 2. С. 93 – 113.

6. *Spiegel E. A., Veronis G. A.* On the boussinesq approximation for compressible fluid // Astrophys. J. 1960. Vol. 131, N 2. P. 442 – 447.

7. *Mihalian J. M.* A Rigorous Exposition of the boussinesq approximation for compressible fluid // Astrophys. J. 1962. Vol. 136, N 3. P. 1126 – 1133.

8. *Ogura Y., Phillips N. A.* Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. // J. Atmos. Sci. 1962. Vol. 32, N. 2. P. 173 – 179.

9. *Вульфсон А. Н.* Уравнения глубокой конвекции в сухой атмосфере. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17, № 8. С. 873 – 876.

10. *Голицын Г. С.* Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями. // Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 55 с.

11. *Вульфсон А. Н., Ингель Л.Х.* Исследование возмущений, связанных с объемным горизонтально-неоднородным тепловыделением в устойчиво стратифицированной атмосфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23, № 6. С. 582 – 592.