АНАЛИЗ ТИПОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КАК ИСТОЧНИК СИСТЕМНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

М.В. Родкин
Геофизический центр РАН, Москва

Рассматриваются типы распределений, наиболее часто встречающиеся в природных процессах, и условия реализации таких распределений. Показано, что определение типа закона распределения позволяет получить важную системную информацию о природе исследуемого процесса. Приводятся примеры использования характера распределения при исследовании различных природных и антропогенных процессов, более подробно рассматриваются вопросы, связанные с формированием месторождений углеводородного и рудного сырья.

Известно, что в природных процессах наиболее часто встречаются нормальное, экспоненциальное, логнормальное и степенное распределения. Широкую распространенность нормального распределения можно трактовать как следствие центральной предельной теоремы теории вероятности. Действительно, нормальное распределение реализуется во всех тех случаях, когда величина эффекта определяется суммарным воздействием некоторого числа сравнимых по величине и слабо зависимых факторов с конечными значениями второго момента распределения (дисперсии). Если оцениваемый эффект обусловлен воздействием взаимозависимых факторов, то результирующее распределение может отличаться от нормального. Это отличие будет проявляться в первую очередь в увеличении или уменьшении вероятности реализации экстремальных значений.

Логнормальное распределение возникает, если результирующий эффект обусловлен не суммой, а произведением сравнимых по величине независимых факторов. Распространенность условий, приводящих к генерации нормального распределения, и связь этого распределения с законом больших чисел часто порождают иллюзию всеобъемлющей применимости нормального закона. В связи с этим заблуждением А. Пуанкаре в свое время заметил, что физики верят в нормальное распределение, считая его математическим выводом, а математики — полагая физическим законом. Замечание Пуанкаре сохраняет свою актуальность и в настоящее время. Аппроксимация эмпирических данных нормальным законом, в случае если данные не соответствуют этому закону, приводит к получению искаженных и малоинформативных оценок.

Нормальный закон распределения можно трактовать также как случай максимальной неопределенности (максимальной энтропии) в распределении положительной случайной величины при фиксированных среднем значении и дисперсии.

Экспоненциальный закон отвечает максимальной неопределенности в распределении положительной случайной величины при фиксированном среднем значении. В распространенной физической трактовке экспоненциального распределения этот параметр представляет собой энергию, а экспоненциальный закон, называемый распределением Больцмана, описывает равновесное распределение по допустимым энергетическим уровням. Отсюда следует, что если значения некоторого физического параметра оказываются распределенными по экспоненциальному закону, то в качестве рабочей гипотезы резонно предположить, что этот параметр линейно связан с величиной энергии. При этом может оказаться полезным трактовать совокупность исследуемых однотипных систем как статистический ансамбль квазичастиц, находящихся в равновесии с неким термостатом, характеризующимся некоторой (возможно, медленно меняющейся) температурой.

Многие эмпирические распределения – например, значения дефицита давления в центре урагана, квадрата максимальной скорости ветра в урагане, амплитуды сгонно-нагонных колебаний уровня моря, максимальных расходов воды в водотоках и скоростей ветра, курсы валют и акций (вне периодов кризисов) – довольно хорошо описываются экспоненциальным законом. Вследствие этого данные величины может оказаться полезным трактовать как линейные функции энергии соответствующих процессов, а системы – как находящиеся в «тепловом» равновесии с некоторым резервуаром.

Широкая популярность степенного закона была продемонстрирована Мандельбротом и в последовавших работах. В 90-х годах было распространено мнение, что условием реализации степенного (фрактального) распределения характеристик некоего процесса являются энергонасыщенность и иерархичность соответствующей среды. В качестве примера указывалась фрактальность сейсмического процесса. Другим простым типовым случаем реализации степенного распределения является мультипликативная модель, отвечающая случаю развития совокупности неустойчивых лавинообразных процессов с равной вероятностью прерывания процесса в любой момент времени.

Другая причина частой встречаемости степенных распределений проистекает из теории так называемых устойчивых законов распределения. Независимые, распределенные по единому закону случайные переменные x_1, x_2,..., x_n отвечают устойчивому распределению, если сумма $\Sigma_n=(x_1+...+x_n)$, после деления на нормирующую константу C_n, отвечает тому же закону распределения. Свойство перенормировки устойчивых законов хорошо известно для частного случая нормального закона, при этом константа C_n равна $n^{1/2}$. В общем случае $C_n=n^{1/\alpha}$, где $0<\alpha\leq2$. Случай $\alpha=2$ соответствует нормальному распределению, при $\alpha<2$ устойчивые законы имеют бесконечную дисперсию, а при $\alpha\leq1$ также и бесконечное математическое ожидание. Распределения с бесконечными значениями первого и второго моментов называют распределениями с «тяжелыми хвостами». Отметим, что для таких распределений неприменимы обычные статистические подходы, основанные на расчете выборочных средних значений и дисперсии.

Имеет место тесная связь устойчивых законов со степенными распределениями. Все устойчивые законы (кроме нормального) имеют степенную асимптотику хвоста функции распределения, т.е. $\{1-F(x)\}\sim1/|x|^{\alpha}$, при $x\to\infty$. Устойчивые законы естественно возникают при анализе кумулятивных эффектов (значений суммарного эффекта некоего сложного воздействия), например величин выигрыша или ущерба, накопленного сейсмического момента, иных кумулятивных процессов. Отсюда может проистекать типичность степенных законов распределения для кумулятивных эффектов (например, величин ущерба).

Вышесказанное поясняет широкую распространенность перечисленных типовых распределений, при этом легко видеть, что отнесение данного распределения к одному из типовых законов позволяет получить важную информацию о характере исследуемого процесса.

Эмпирические данные по рудным месторождениям свидетельствуют о том, что распределение величин концентрации руд достаточно часто отвечает логнормальному закону, а величин запасов – степенному. Такой характер распределения может реализоваться, если рудные месторождения часто формируются в результате ряда последовательных процессов концентрирования рудного компонента (как это известно геологам-рудникам). Для реализации степенного закона с тяжелым хвостом естественно обратиться к теории устойчивых законов и к представлениям о возникновении месторождений в ходе протекающих в земной коре неравновесных лавинообразных процессов. Аналогичные представления оказываются полезными и при исследовании реализации степенных законов распределения для величин запасов месторождений углеводородов.