

## ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ КАПИЛЛЯРНОЙ ПРОПИТКИ ГОРНЫХ ПОРОД

В.Л. Барабанов  
ИПНГ РАН, e-mail: vlbarabanov@mail.ru

Начальная стадия капиллярной пропитки проницаемых пористых материалов в первом приближении описывается моделью Вашбурна (Washburn, 1921)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{r_c \gamma \cos \theta}{4\mu h}, \quad (1)$$

где  $h$  – текущая высота капиллярного поднятия;  $r_c$  – радиус капилляра;  $\gamma$  – коэффициент поверхностного натяжения;  $\theta$  – краевой угол смачиваемости;  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости,  $t$  – время. Интегрирование уравнения (1) дает степенной закон капиллярной пропитки вида  $h \propto \sqrt{t}$ , т.е. с показателем степени, равным 0,5.

Между тем, некоторые известные лабораторные эксперименты свидетельствуют о том, что показатель степени может заметно отличаться от величины 0.5 и, более того, являться функцией фильтрационно-емкостных параметров горных пород.

Так, в работе (Барабанов, 2014) представлены результаты лабораторных экспериментов по определению параметров противоточной капиллярной пропитки образцов горных пород в относительно широком диапазоне их проницаемости. Эксперименты проводились с цилиндрическими образцами песчаников с приблизительно одинаковыми длиной и диаметром ( $\sim 30$  мм). Подготовка образцов заключалась в их первоначальной экстракции и сушке до постоянного веса. В качестве пропитывающей жидкости использовалась дистиллированная вода. С каждым образцом проводились три серии пропитки: в 1-й серии пропитка осуществлялась через всю поверхность образца; во 2-й серии боковая поверхность изолировалась и пропитка осуществлялась через два противоположных торца; в 3-й серии пропитка производилась через один торец (второй торец, как и боковая поверхность, был изолирован).

Кривые капиллярной пропитки определялись по изменению гидростатического веса образцов, полностью погруженных в воду. Погрешность регистрации прироста веса образца не превышала 0.3-0.5 мг, что было достаточно для получения надежных данных. Типичные кривые противоточной капиллярной пропитки на начальной стадии представлены на рис. 1.

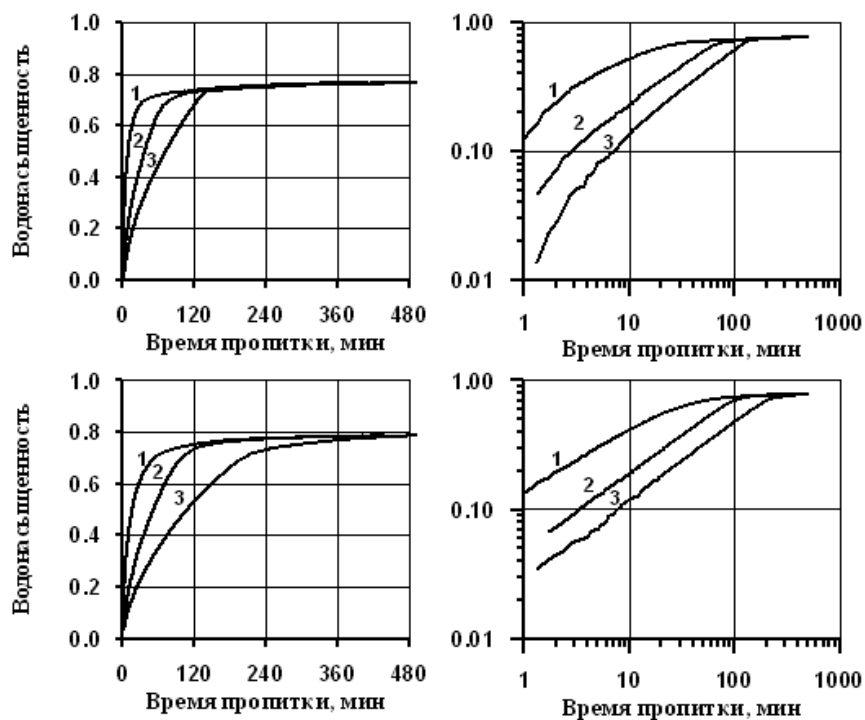


Рис. 1. Кривые капиллярной пропитки двух образцов керн: 1 – открыты все боковые поверхности; 2 – открыты два торца; 3 – открыт один торец

Для наглядности кривые пропитки на рис. 1 даны в двух масштабах: линейном и билогарифмическом. Проницаемость образцов варьировала от первых единиц мД до сотен мД, пористость – от 0,09 до 0,24. Начальная стадия капиллярной пропитки образцов с двумя или одним открытыми торцами продолжалась, как правило, несколько часов; прирост веса образцов в этом интервале времени хорошо аппроксимировался степенной зависимостью  $P \propto (t)^\alpha$ , но показатель степени  $\alpha$  заметно отличался от предсказываемой моделью Вашбурна величины 0.5, варьируя от ~0,56 до ~0,68. Более того, оказалось, что существует тенденция роста показателя  $\alpha$  с ростом величины  $\sqrt{k/m}$ , где  $k$  – проницаемость,  $m$  – пористость (рис. 2).

Для описания этой зависимости можно использовать известные модели фрактальности порового пространства горных пород, отражающейся не только в их статической микроструктуре, но и в динамических фильтрационных процессах.

подавляющая часть обширного объема известных работ, касающихся фрактальных характеристик микроструктуры проницаемых пористых материалов (к коим принадлежат и горные породы), посвящена описанию их статического состояния. При

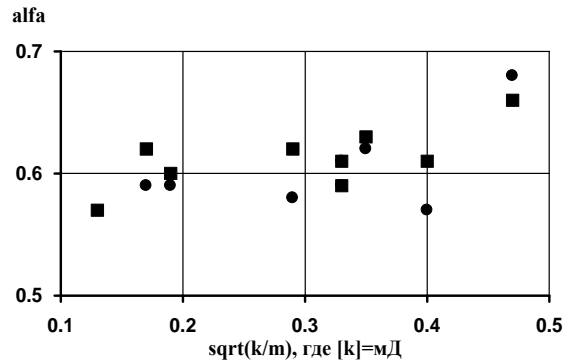


Рис. 2. Зависимость показателя степени  $\alpha$  от величины  $\sqrt{k/m}$ .  
Кружками показаны данные экспериментов с двумя открытыми торцами керна,  
квадратиками – с одним открытым торцом керна

этом различаются случаи, когда фракталом является либо поровое пространство, либо твердая матрица, либо поверхность системы пор, либо объемы насыщающих пористую среду флюидов и их границы. Так, в частности, лабораторные исследования показали, что поверхность порового пространства песчано-глинистых горных пород фрактальна и характеризуется спектром размеров, различающихся на четыре порядка: от  $10^{-2}$  до  $10^2$  мкм. При этом фрактальная размерность порового пространства горных пород находится в диапазоне от 2.6 до 2.8 и имеет тенденцию к увеличению в процессе диагенеза (Aharonov, Rothman, 1996).

Меньшее число работ посвящено роли фрактальности в протекании динамических процессов в проницаемых пористых средах, в частности, при однофазной или многофазной фильтрации или при диффузионном массопереносе. Отметим из этих работ те, которые наиболее полезны для решения рассматриваемой нами проблемы. Поскольку капиллярная пропитка представляет собой, по сути, самопроизвольный фильтрационный процесс, в нашем кратком обзоре обратимся именно к таким работам.

В статье (Иванов, 2002) рисуется образная качественная картина формирования фрактальности порового пространства и его влияния на фильтрационные процессы. Усложнение внутренней структуры пористого материала, как отмечает данный автор, происходит по методу проб и ошибок. Одни и те же элементы воспроизводятся во многих экземплярах, не вполне тождественных оригиналу. Далее происходит естественный отбор. Если какая-либо случайная связь между двумя и более элементами является исключительно целесообразной, она закрепляется в виде устойчивого образования и более не трансформируется. Потом такие образования (кластеры) выстраиваются как единичные

функциональные элементы. Процесс развивается далее, и система стремится к оптимальной (устойчивой) структуре. Протекающая через среду жидкость распределена в ней случайным образом. Задача фильтрации сводится к задаче перколяции. Протекание жидкости начинается с возникновения перколяционного кластера, фрактальная размерность которого определяет эффективные коэффициенты гидравлического сопротивления среды (вязкий и инерционный). Увеличение фрактальной размерности «фильтрационного» кластера означает снижение порога перколяции, необходимого для начала течения.

В работе (Черняков, 2001) получены асимптотические выражения для величин гидродинамического сопротивления и эффективного гидродинамического радиуса фрактального кластера шарообразной формы. Показано, что с увеличением фрактальной размерности кластера от 1 до 3 его гидродинамическое сопротивление растет, а эффективный гидродинамический радиус, соответственно, уменьшается. Это качественно совпадает с выводами, приведенными в статье (Чаусов, Германов, 2001), посвященной анализу оптимальных фильтровальных перегородок с конечным гидравлическим сопротивлением. Показано, в частности, что наиболее оптимальными фильтровальными перегородками являются те, фрактальная размерность поверхности волокон которых превышает 2. В то же время для поддержания конечной величины гидравлического сопротивления фрактальная размерность поверхностей волокон не должна превышать 2,5.

В экспериментах по несмешивающемуся вытеснению вязкой жидкости менее вязкой было обнаружено образование фрактала (Nittmann et al., 1985). Эксперименты проводились в радиальной ячейке Хеле-Шоу. Отношение вязкостей жидкостей не превышало 0,01. Фрактальная размерность образующегося кластера (фронта вытеснения)  $D_L$  составила  $1,70 \pm 0,05$  и не зависела от скорости вытеснения в диапазоне расходов 0,4–40 мл/мин. Этот результат согласуется с результатами экспериментов по несмешивающемуся вытеснению в прозрачных плоских моделях (Димов, 2004). Здесь показано, что при капиллярных числах менее  $3 \cdot 10^{-5}$  и при дренаже, и при пропитке фронт вытеснения имеет фрактальную размерность  $1,34 \pm 0,06$  и не зависит от скорости вытеснения.

В статье (Wagner et al., 1995) проведено численное моделирование образования остаточной насыщенности в пористой среде при вытеснении смачивающей фазы несмачивающей (воздухом). Пористая среда аппроксимирована фракталом. Получен следующий важный результат: при увеличении фрактальной размерности предельная

насыщенность вытесняющей фазы будет возрастать, что соответствует уменьшению остаточной насыщенности вытесняемой фазы, т.е. более полному ее извлечению из пористой среды.

Известен ряд работ, где на основе фрактальных моделей получены и исследованы уравнения, описывающие фильтрацию жидкости в проницаемых пористых средах и их водоудерживающую способность. Как правило, такие уравнения содержат обыкновенные или частные производные дробного порядка. В нашем кратком обзоре будем придерживаться хронологической последовательности работ.

Аномально быстрая капиллярная пропитка пористых сред обозначена в работе (Toledo et al., 1993) как *гипердисперсия*. Этот эффект объясняется фрактальной структурой поверхности пор. Общая водонасыщенность складывается из насыщенности по тонким пленкам  $S_{jf}$  и насыщенности по пропитывающей объемной фазе  $S_{ps}$ . Расклинивающее давление  $\Pi$  обратно пропорционально толщине пленки  $\Pi \propto h^{-m}$ , где  $m$  – показатель степени. Поэтому первая составляющая насыщенности  $S_{jf} \propto P_c^{-1/m}$ , где  $P_c$  – капиллярное давление. Вклад объемной фазы приводит к следующему степенному закону  $S_{ps} \propto P_c^{(3-D)}$ , где  $D$  – фрактальная размерность неровностей стенок пор. Следовательно, если смачивающая пропитывающая жидкость формирует преимущественно объемные структуры и если тонкие пленки контролируют гидравлическое сопротивление смачивающей фазы, то для коэффициента капиллярной дисперсии можно получить такой закон:  $D_{cap} \propto S_w^v$ , где  $v = \frac{3-m(4-D)}{m(3-d)}$ . Таким образом, утверждается, что пропитка *гипердисперсна*, если  $m > \frac{3}{4-D}$ ; *гиподисперсна*, если  $m < \frac{3}{4-D}$ ; и подобна обычному *диффузионному* процессу, если  $m = \frac{3}{4-D}$ .

В статье (Gimenez et al., 1997) приведен обширный обзор моделей водоудерживающей способности грунта и капиллярных кривых, основанных на фрактальном представлении порового объема, поверхности пор, фрагментации и связности насыщенности разными флюидами, размерности которых в общем случае не совпадают по величинам. На основании анализа большого объема экспериментальных и теоретических данных был сделан важный вывод о том, что для описания кривых капиллярного давления можно использовать степенной закон типа

$$\frac{S}{S_{\max}} = \left(\frac{p}{p_{\min}}\right)^{D-3}, \quad \text{или} \quad \frac{S}{S_{\max}} = \left(\frac{p}{p_{\min}}\right)^{D-2} \quad (2)$$

где  $S$  – водонасыщенность,  $p$  – поровое давление,  $D$  – фрактальная размерность порового пространства. Важной особенностью таких кривых капиллярного давления является то, что показатель  $D$ , соответствующий различным участкам кривой, может иметь разную величину и разную физическую интерпретацию. Так, удерживающая способность мелких пор, вероятно, является функцией шероховатости поверхности пор, т.е.  $D$  есть фрактальная размерность поверхности пор; тогда как удерживающая способность крупных пор, по-видимому, является функцией и размеров пор, и шероховатости поверхности. Таким образом,  $D$  есть сложная комбинация фрактальных размерностей порового объема и поровой поверхности.

Переходя к нашему случаю динамики капиллярной пропитки, отсюда следует, что, поскольку со временем меняется характерный размер пропитываемых пор, то можно ожидать и изменения показателей степенных законов, описывающих эту динамику.

Согласно исследованиям (Мейланов, 1996; Мейланов, 2001), использование дробной производной по времени позволяет учесть эффекты памяти. Это для некоторой физической величины  $F(t)$ , взаимодействующей с другой физической величиной  $f(t)$ ,

означает наличие между ними связи  $F(t) = \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ . Для случая марковского

процесса с полным отсутствием памяти функция  $K(t)$  имеет вид  $K(t-\tau)=\eta\delta(t-\tau)$ , где  $\eta$  – положительная константа. Когда промежутки времени с эффектом памяти образуют множество меры Хаусдорфа-Безиковича (множество Кантора), связь между величинами

$F(t)$  и  $f(t)$  дается дробным интегралом  $F(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$ , где показатель дробного

интеграла  $\alpha$  совпадает с фрактальной размерностью множества Кантора. Эволюция системы с частичной памятью описывается дробными производными

$\frac{\partial}{\partial t} f(t) \Rightarrow \frac{\partial^\alpha}{t_0 \partial \tau^\alpha} f(\tau)$ . В случае пространственных переменных переход к дробной

производной соответствует учету пространственных корреляций с заменой  $t_0 \rightarrow l_0$ ,  $\tau \rightarrow \xi$ . В итоге одномерная задача фильтрации сводится к решению следующей

системы дифференциальных уравнений (3):

$$\frac{d^\alpha(m\rho)}{t_0 d\tau^\alpha} + \frac{1}{l_0} \frac{d^\beta}{d\xi^\beta} (\rho v(\xi)) = 0, \quad (3)$$

$$v = -\frac{k}{l_0 \mu} \frac{d^\gamma}{d\xi^\gamma} p(\xi, t)$$

где первое уравнение описывает закон сохранения, второе уравнение – закон фильтрации Дарси.

В случае стационарной фильтрации распределение давления по пространственной координате представляется уравнением

$$\frac{d^\beta}{d\xi^\beta} \left( \rho \frac{k}{l\mu} \frac{d^\gamma}{d\xi^\gamma} p(\xi) \right) = 0. \quad (4)$$

В случае нестационарной фильтрации эволюция порового давления описывается следующим уравнением

$$\frac{d^\alpha(m\rho)}{t_0 d\tau^\alpha} = \frac{1}{l_0} \frac{d^\beta}{d\xi^\beta} \left[ \frac{k\rho}{\mu} \frac{d^\gamma}{d\xi^\gamma} p(\xi, \tau) \right], \quad (5)$$

где  $\alpha = \beta + \gamma$ .

В статьях (Запивалов и др., 2000; Запивалов, Смирнов, 2001) построена модель переноса нефти и газа во фрактальных кластерах с размерностью  $D=2.57-2.87$ . Перенос нефти в такой фрактальной структуре характеризуется плотностью вероятности  $f(r, t)$  найти частицу в точке  $r$  в момент времени  $t$ . В начальный момент времени  $t=0$  частица находится в точке с координатой  $r=0$ . Уравнение диффузии на фрактале в сферических координатах имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( K r^{D-1-\xi} \frac{\partial F}{\partial r} \right), \quad (6)$$

где  $F(r, t)$  – плавная огибающая функции  $f(r, t)$ ,  $K$  – коэффициент диффузии,  $\xi$  – показатель аномальной диффузии. Выражение для среднего квадрата расстояния  $\langle r^2 \rangle$ , на которое передвигается частица за время  $t$ , выглядит следующим образом

$$\langle r^2 \rangle = [K(2 + \xi)^2 t]^{\frac{2}{2+\xi}} \Gamma\left(z + \frac{2}{2+\xi}\right) \Gamma(z), \quad (7)$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция,  $z = D/(2+\xi)$ .

В работе (Ваемер et al., 2001) для описания результатов натурального эксперимента по распространению тритиевых трассеров в водоносном горизонте было использовано

следующее одномерное уравнение диффузионно-конвекционного переноса примесей нецелого порядка

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -\left(v \frac{\partial}{\partial x} - K \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{D/2} C(x,t), \quad (8)$$

где  $C$  – концентрация примесей,  $v$  – скорость адвекции,  $K$  – комбинированный коэффициент молекулярной диффузии и адвекционной дисперсии,  $D$  – размерность фрактальной траектории диффузионного движения.

Я.Л. Кобелевым и др. (2002) получено и исследовано решение кинетического уравнения Климантовича в дробных производных по времени, координатам и импульсу. Это уравнение описывает диффузионные процессы в неупорядоченных средах, вблизи шероховатых поверхностей, в гелях, аэрозолях и т.д.

В одномерном случае данное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} f(x,p,t) = D^x \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial x^{2\gamma}} f(x,p,t) + D^p \frac{\partial^{2\xi}}{\partial p^{2\xi}} f(x,p,t), \quad (9)$$

где  $\gamma$ ,  $\nu$ ,  $\xi$  – дробные величины, удовлетворяющие условиям  $\gamma \leq 1$ ,  $0 \leq \nu \leq 1$ ,  $\xi \leq 1$ . В приведенном уравнении предполагается, что и коэффициент диффузии в импульсном пространстве, и коэффициент диффузии в координатном пространстве не зависят от  $x$ ,  $p$ ,  $t$ . При начальном условии  $f(x,p,t=0) = f_0(x,p)$  точное решение уравнения (9) записывается в виде

$$f(x,p,t) = A \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp(ikx_1 + ip p_1) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+vn)} [t^\nu \tau^\nu - (ik)^{2\gamma} - (ip)^{2\xi}]^n f_0(k,p), \quad (10)$$

где

$$A = (D^x t^\nu)^{-1/2\gamma} (D^p t^\nu)^{-1/2\xi}$$

$$x_1 = x (D^x t^\nu)^{-1/2\gamma}, p_1 = p (D^p t^\nu)^{-1/2\xi}$$

Аналізу капиллярных явлений во фрактальных системах уделено большое внимание в работе (Ролдугин, 2003). В частности, приводится следующее уравнение зависимости краевого угла  $\theta$  от эффективного радиуса капли  $R_d$  и фрактальной размерности поверхности  $D_f$

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \left\{ \left[ \frac{1 - (\gamma_{02} / \gamma_{01}) (d_2 / d_1)^{2-D_f}}{1 - (\gamma_{02} / \gamma_{01})} \right] \left( \frac{d_1}{R_d} \right)^{2-D_f} \right\}, \quad (11)$$



где  $d_1$  – размер молекул жидкости;  $d_2$  – размер молекул газа (или эквивалентной ему фазы);  $\cos\theta_0=(\gamma_{02}-\gamma_{01})/\gamma_{12}$ ;  $\theta_0$  – краевой угол для гладкой поверхности;  $\gamma_{01}$ ,  $\gamma_{02}$ ,  $\gamma_{12}$  – коэффициенты натяжения для поверхностей жидкость – твердое тело, газ – твердое тело и жидкость – газ, соответственно. Из приведенной формулы (11) видно, что с увеличением размера капли абсолютная величина косинуса краевого угла увеличивается. При этом с увеличением размера капель они все лучше (или все хуже) смачивают поверхность.

Отмечено также, что экспериментальные данные хорошо соответствуют зависимости

$$\cos\theta = \cos\theta_0 \left(\frac{d_1}{R_d}\right)^{2-D_f}, \quad (12)$$

которая является частным случаем (11).

В работе (Yao et al., 2004) построено уравнение фильтрации жидкости по системе трещин (с фрактальной размерностью  $D_f$ ), помещенной в эвклидову матрицу с размерностью  $D$ . Кроме этого, учитывается квадратичный член. В итоге было получено следующее уравнение

$$\frac{\mu\beta_f}{m} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_f-\theta-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{D_f-\theta-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\beta_f}{r^\theta} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad (13)$$

где  $\beta_f$  – сжимаемость жидкости,  $\theta$  – размерность отдельной трещины.

В статье (Сулейманов и др., 2005) исследовано решение одномерного стационарного уравнения фильтрации в виде

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{ka_0}{\mu} \rho \frac{d^\alpha p}{dx^\alpha} \right) = 0, \quad (14)$$

где  $k$  – проницаемость,  $a_0$  – линейный размер,  $\rho$  и  $\mu$  – плотность и вязкость жидкости, соответственно,  $p$  – давление.

О.Ю. Динариевым (2006) исследовано решение уравнения нестационарной фильтрации в полярных координатах в виде

$$r^{d-1} \frac{\partial p}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{d-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (15)$$

где  $d$  – фрактальная размерность системы гидравлически связанных трещин. Коэффициент пьезопроводности  $\kappa^2$  определяется через проницаемость  $k$ , вязкость  $\mu$ , пористость  $m$  и объемные модули упругости пор  $E$  и твердого скелета  $E_S$ :

$$\kappa^2 = \mu^{-1} (mE^{-1} + E_S^{-1})^{-1} k. \quad (16)$$

Подробный вывод уравнения фильтрации типа (15) в среде с фрактальными свойствами содержится в работах (Багманов и др., 2006; Черных, 2007).

Еще более подробный и представительный обзор моделей фильтрационно-емкостных характеристик в пористых материалах с внутренней фрактальной структурой содержится в работе (Yu B., 2008).

Вероятно, наиболее близкой к целям нашего исследования является модель экстрагирования из фрактальной системы ветвящихся капилляров, предложенная в статье (Бабенко, Иванов, 2009). Построена математическая модель процесса экстрагирования из полубесконечного пористого тела, содержащего поры  $n$  видов, ветвящихся масштабноподобным образом. Пора, выходящая на поверхность, имеет полубесконечную длину и бесконечное число ответвлений, которые, в свою очередь, полубесконечны и имеют ответвления и т.д. Первоначальная концентрация вытесняемого вещества в порах всех видов постоянна и равна  $C_0$ . В начальный момент времени пора, выходящая на поверхность, открывается, и концентрация на границе тела становится равной 0. Требуется найти поток вещества через поверхность тела как функцию времени.

Уравнение пропитки единичного полубесконечного канала без ответвлений, в котором коэффициент диффузии равен  $K_1$ , записывается в виде дифференциального уравнения с дробными производными в виде:

$$\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} - \sqrt{K_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \sqrt{K_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) C_1 = 0 \quad (17)$$

Здесь использованы операторы дробного дифференцирования, причем,

$$\frac{d^\nu f(t)}{dt^\nu} \equiv D^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\nu} d\tau, \quad (18)$$

где  $f(t)$  – произвольная функция времени,  $\Gamma(x)$  – гамма-функция.

Для количества вещества  $Q_s$ , выделившегося через сечение единичного порового канала  $x_1=0$  в момент времени  $t$ , получается такое выражение

$$Q_s(t) = 2\sqrt{\frac{K_1 t}{\pi}} C_0 \quad (19)$$

Очевидно, здесь мы имеем аналог модели Вашбурна (1), т.е. степенной закон капиллярной пропитки.

Далее рассматривается случай, когда множество каналов мелкого уровня, где коэффициент диффузии равен  $K_1$ , соединяется с единичным каналом следующего более

крупного ранга, выходящим на поверхность тела и в котором коэффициент диффузии равен  $K_2$ . В итоге для количества выделившегося вещества получаем

$$\frac{Q_s(t)}{C_0} = \sqrt{K_2} \left( \frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{b_1 t}{2} - \frac{b_1^2}{8} \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} + \frac{b_1^3}{16} \frac{t^2}{2} - \frac{5b_1^4}{128} \frac{8t^{5/2}}{15\sqrt{\pi}} + \dots \right), \quad (20)$$

где  $b_1 = \frac{4\varepsilon_1 \sqrt{K_1}}{d_2}$ ;  $\varepsilon_1$  – доля площади кольцевой границы выделенного элемента, занятая выходными отверстиями мелких пор;  $d_2$  – диаметр главного порового канала.

В предельном случае  $t \rightarrow \infty$  для  $n$  поровых каналов получается такая формула

$$\frac{Q_s(t)}{C_0} = \sqrt{K_n} b_{n-1}^{1/2} b_{n-2}^{1/4} b_{n-3}^{1/8} \dots b_1^{1/2^{n-1}} \frac{t^{[1-(1/2)^n]}}{\Gamma[2-(1/2)^n]}. \quad (21)$$

Если поровые каналы ветвятся неограниченно и коэффициенты  $b_i$  образуют простую закономерность типа  $b_{n-1}=b$ ,  $b_{n-2}=\delta b$ , ...,  $b_{n-k}=\delta^{k-1}b$ ,  $\delta > 0$ , а также  $K_\infty=K$ , то при  $t \rightarrow \infty$

$$\frac{Q_s(t)}{C_0} = \sqrt{K} \delta b t. \quad (22)$$

При  $\delta=1/2$  расчетная формула экстрагированного количества вещества выглядит в очень простом виде

$$\frac{Q_s(t)}{C_0} = \sqrt{K} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + \frac{b}{2} t \right). \quad (23)$$

Последнее означает, что показатель степени приближенного степенного закона превышает 0.5, что и наблюдается в экспериментах.

В общем случае экспериментальные данные по экстракции (пропитке) рекомендуется аппроксимировать следующим эмпирическим законом

$$Q = at^{1/2} + bt^v, \quad (24)$$

где  $0.5 \leq v \leq 1$ .

Анализ наших экспериментальных данных показал некорректность аппроксимации кривых капиллярной пропитки на начальной стадии на основе закона (24). Поэтому нами предложена другая простая модель, описывающая процесс пропитки с учетом фрактальности поровых каналов.

Простейшее уравнение Вашбурна (1) запишем в следующем виде:

$$h \frac{d^\alpha h}{dt^\alpha} = \frac{r_c \gamma \cos \theta}{4\mu} \equiv A. \quad (25)$$

Используя вышеприведенный оператор дробного дифференцирования (18), получаем уравнение:

$$\frac{h(t)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{h(\eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta = A \quad (26)$$

Текущую высоту капиллярного подъема аппроксимируем простой степенной функцией:

$$h(t) = Bt^\nu. \quad (27)$$

Подставляя (27) в уравнение (26) и используя известную формулу

$$\int_0^t \frac{B\eta^\nu}{(t-\eta)^\alpha} d\eta = Bt^{\nu+1-\alpha} \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\nu-\alpha+2)}, \quad (28)$$

получим следующее выражение

$$B^2 t^{2\nu-\alpha} (\nu+1-\alpha) \frac{\Gamma(1+\alpha/2)}{\Gamma(2-\alpha/2)} = A. \quad (29)$$

В тривиальном случае это уравнение соответствует варианту, когда

$$\nu = \frac{\alpha}{2}. \quad (30)$$

Из этого следует простая связь коэффициентов  $A$  и  $B$ :

$$B^2 (1-\alpha/2) \frac{\Gamma(1+\alpha/2)}{\Gamma(2-\alpha/2)} = A. \quad (31)$$

Согласно формуле (30), при величине фрактальной размерности капиллярного канала, равной 1, величина  $\nu=0,5$ . Это соответствует простейшей модели Вашбурна. В случае более высокой фрактальной размерности  $\nu>0,5$ , что и наблюдается в наших экспериментах. Более того, согласно нашим экспериментальным данным, показатель  $\nu$  монотонно возрастает с ростом проницаемости образца горной породы. Это не противоречит известным феноменологическим моделям фильтрации жидкости через проницаемые пористые среды. Используя такие простые связи, можно построить простые эмпирические модели, связывающие проницаемость среды с фрактальной размерностью поровых каналов. Ну а построить на этой основе более строгие модели – дело будущего.

## ЛИТЕРАТУРА

*Бабенко Ю.И., Иванов Е.В.* Экстрагирование из фрактальной системы ветвящихся капилляров // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, № 1. С. 99–104.

*Багманов В.Х., Байков В.А., Латыпов А.Р., Васильев И.Б.* Методика интерпретации и определения параметров уравнения фильтрации в пористой среде с фрактальными свойствами // Вестник Уфимского гос. авиационного технич. ун-та. 2006. Т. 7, № 2. С. 146–149.

*Барабанов В.Л.* Эмпирические параметры модели противоточной капиллярной пропитки горных пород // Геофизические исследования. 2014. Т. 15, № 1. С. 27–52.

*Димов С.В.* Гидродинамика капиллярных течений в пористой среде: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск. 2004. 22 с.

*Динариев О.Ю.* Кривая восстановления давления для фрактальной трещиноватой среды // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79, № 2. С. 76–80.

*Запивалов Н.П., Смирнов Г.И.* Фракталы в нефтегазовой геологии и геофизике // Фракталы и циклы развития систем. Томск, 2001. С. 181–184.

*Запивалов Н.П., Смирнов Г.И., Харитонов В.И.* Фрактальная геодинамика нефтегазовых месторождений // Наука и технология углеводородов. 2000. № 2. С. 44–48.

*Иванов Е.А.* Фрактальные свойства протекания жидкости в пористой среде. Обнинск: Препринт ФЭИ-2928, 2002. 14 с.

*Кобелев Я.Л., Кобелев Л.Я., Кобелев В.Л., Романов Е.П.* Диффузия в фрактальных средах на основе кинетического уравнения Климантовича в фрактальном пространстве // Доклады РАН. 2002. Т. 385, № 5. С. 612–614.

*Мейланов Р.П.* К теории фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 23. С. 40–42.

*Мейланов Р.П.* Обобщенные уравнения одномерной фильтрации с дифференцированиями дробной степени // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74, № 2. С. 34–37.

*Ролдугин В.И.* Свойства фрактальных дисперсных систем // Успехи химии. 2003. Т. 72, № 11. С. 1027–1054.

*Сулейманов Б.А., Аббасов Э.М., Эфендиева А.О.* Стационарная фильтрация в фрактально-неоднородной пористой среде // Инженерно-физический журнал. 2005. Т. 78, № 4. С. 194–196.

*Чаусов Ф.Ф., Германов Ю.Н.* Расчет коэффициента отфильтрования и гидравлического сопротивления волокнистой фильтровальной перегородки с использованием размерности Хаусдорфа-Безиковича // Теоретические основы химической технологии. 2001. Т. 35, № 4. С. 372–376.

*Черных В.А.* Моделирование фильтрации нефти методами дробного исчисления // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2007. № 2. С. 33–39.

*Черняков А.Л.* Гидродинамическое сопротивление фрактального кластера // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2001. Т. 120, № 4(10). С. 883–888.

*Aharonov E., Rothman D.* Growth of correlated pore-scale structures in sedimentary rocks: a dynamical model // Jour. Geophys. Res. 1996. V. 104, № B2. P. 2973–2987.

*Baeimer B., Benson D.A., Meerschaert M.M., Wheatcraft S.W.* Subordinated advection-dispersion equation for contaminant transport // Water Resource Research. 2001. V. 37, № 6. P. 1543–1550.

*Gimenez D., Perfect E., Rawls W., Pachepsky Ya.* Fractal models for prediction soil hydraulic properties: a review // Engineering Geology. 1997. V. 48, № 3. P. 161–183.

*Nittmann J., Daccord G., Stanley H.* When are viscous fingers fractal? // Fractals in Physics: Proc. 6<sup>th</sup> Intern. Symp. Triest, July 9-12, 1985. P. 193–202.

*Toledo P.G., Davis H.T., Scriven L.E.* Capillary hyperdispersion of wetting liquids in fractal porous media // Transport in Porous Media. 1993. Vol. 10, № 1. P. 81–94.

*Wagner G., Birovljev A., Meakin P., Feder J., Jossang T.* Fragmentation cluster in two-dimensional porous media // Europhysics Letters. 1995. Vol. 31, № 3. P. 139–144.

*Washburn E.W.* The dynamics of capillary flow // Physics Review. 1921. Vol. 17. P. 273–283.

*Yao Y. et al.* Investigation of the flow in fractal reservoir including the effects of quadratic gradient term // Jour. Hydrodynamics. Ser. B. 2004. Vol. 16, № 4. P. 474–480.

*Yu B.* Analysis of flow in fractal porous media // Applied Mechanics Reviews. 2008. Vol. 61, № 1–6. P. 050801/1–19.

#### REFERENCES

*Babenko Yu.I., Ivanov E.V.* Ekstragirovanie iz fraktal'noy sistemy vetvyashchikhsya kapillyarov // Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii. 2009. T. 43, № 1. S. 99–104.

*Bagmanov V.Kh., Baykov V.A., Latypov A.R., Vasil'ev I.B.* Metodika interpretatsii i opredeleniya parametrov uravneniya fil'tratsii v poristoy srede s fraktal'nymi svoystvami // Vestnik Ufimskogo gos. aviatsionnogo tekhnich. un-ta. 2006. T. 7, № 2. S. 146–149.

*Barabanov V.L.* Empiricheskie parametry modeli protivotochnoy kapillyarnoy propitki gornyx porod // Geofizicheskie issledovaniya. 2014. T. 15, № 1. S. 27–52.

*Dimov S.V.* Hidrodinamika kapillyarnykh techeniy v poristoy srede: Avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Novosibirsk. 2004. 22 s.

*Dinariev O.Yu.* Krivaya vosstanovleniya davleniya dlya fraktal'noy treshchinovatoy sredy // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 2006. T. 79, № 2. S. 76–80.

*Zapivalov N.P., Smirnov G.I.* Fraktaly v neftegazovoy geologii i geofizike // Fraktaly i tsikly razvitiya sistem. Tomsk, 2001. S. 181–184.

*Zapivalov N.P., Smirnov G.I., Kharitonov V.I.* Fraktal'naya geodinamika neftegazovykh mestorozhdeniy // Nauka i tekhnologiya uglevodorodov. 2000. № 2. S. 44–48.

*Ivanov E.A.* Fraktal'nye svoystva protekaniya zhidkosti v poristoy srede. Obninsk: Preprint FEI-2928, 2002. 14 s.

*Kobelev Ya.L., Kobelev L.Ya., Kobelev V.L., Romanov E.P.* Diffuziya v fraktal'nykh sredakh na osnove kineticheskogo uravneniya Klimantovicha v fraktal'nom prostranstve // Doklady RAN. 2002. T. 385, № 5. S. 612–614.

*Meylanov R.P.* K teorii fil'tratsii v poristyx sredakh s fraktal'noy strukturoy // Pis'ma v ZHTF. 1996. T. 22, № 23. S. 40–42.

*Meylanov R.P.* Obobshchennye uravneniya odnomernoy fil'tratsii s differentsirovaniyami drobnoy stepeni // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 2001. T. 74, № 2. S. 34–37.

*Roldugin V.I.* Svoystva fraktal'nykh dispersnykh sistem // Uspekhi khimii. 2003. T. 72, № 11. S. 1027–1054.

*Suleymanov B.A., Abbasov E.M., Efendieva A.O.* Statsionarnaya fil'tratsiya v fraktal'no-neodnorodnoy poristoy srede // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 2005. T. 78, № 4. S. 194–196.

*Chausov F.F., Germanov Yu.N.* Raschet koeffitsienta ofil'trovaniya i gidravlicheskogo soprotivleniya voloknistoy fil'troval'noy peregorodki s ispol'zovaniem razmernosti Khausdorfa-Bezikovicha // Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii. 2001. T. 35, № 4. S. 372–376.

*Chernykh V.A.* Modelirovanie fil'tratsii nefti metodami drobnogo ischisleniya // Avtomatizatsiya, telemekhanizatsiya i svyaz' v neftyanoy promyshlennosti. 2007. № 2. S. 33–39.

*Chernyakov A.L.* Gidrodinamicheskoe soprotivlenie fraktal'nogo klastera // Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki. 2001. T. 120, № 4(10). S. 883–888.

*Aharonov E., Rothman D.* Growth of correlated pore-scale structures in sedimentary rocks: a dynamical model // Jour. Geophys. Res. 1996. V. 104, № B2. P. 2973–2987.

*Baeimer B., Benson D.A., Meerschaert M.M., Wheatcraft S.W.* Subordinated advection-dispersion equation for contaminant transport // Water Resource Research. 2001. V. 37, № 6. P. 1543–1550.

*Gimenez D., Perfect E., Rawls W., Pachepsky Ya.* Fractal models for prediction soil hydraulic properties: a review // Engineering Geology. 1997. V. 48, № 3. P. 161–183.

*Nittmann J., Daccord G., Stanley H.* When are viscous fingers fractal? // Fractals in Physics: Proc. 6<sup>th</sup> Intern. Symp. Triest, July 9-12, 1985. P. 193–202.

*Toledo P.G., Davis H.T., Scriven L.E.* Capillary hyperdispersion of wetting liquids in fractal porous media // Transport in Porous Media. 1993. Vol. 10, № 1. P. 81–94.

*Wagner G., Birovljev A., Meakin P., Feder J., Jossang T.* Fragmentation cluster in two-dimensional porous media // Europhysics Letters. 1995. Vol. 31, № 3. P. 139–144.

*Washburn E.W.* The dynamics of capillary flow // Physics Review. 1921. Vol. 17. P. 273–283.

*Yao Y. et al.* Investigation of the flow in fractal reservoir including the effects of quadratic gradient term // Jour. Hydrodynamics. Ser. B. 2004. Vol. 16, № 4. P. 474–480.

*Yu B.* Analysis of flow in fractal porous media // Applied Mechanics Reviews. 2008. Vol. 61, № 1–6. P. 050801/1–19.