

УДК 577. 345

DOI 10.29222/ipng.2078-5712.2018-23.art16

## МЕХАНИЗМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО СВЧ-ПОЛЯ С ВОДОНАСЫЩЕННЫМИ ГЕОСТРУКТУРАМИ. ЧАСТЬ 1. ФОНОВОЕ РАВНОВЕСИЕ СТРУКТУР ВОДЫ

Володин И.А.<sup>1</sup>, Андреев С.Н.<sup>2</sup>, Савранский В.В.<sup>2</sup>

1 – ИПНГ РАН, 2 – Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН  
E-mail: savr@nsc.gpi.ru

**Аннотация.** Рассмотрены процессы самоорганизации поля возмущений воды, зависящие от достижения фонового равновесия и являющиеся важным фактором, удерживающим пирамиду коллективных движений от разрушения. Само состояние равновесия есть обобщенная диссипативная структура, которая требует для своего формирования притока энергии. После формирования в среде некоторой совокупности диссипативных структур и непрекращающейся накачке энергии в эту среду процесс диссипации развивается, приводя к взаимодействию (на уровне шумов) между этими структурами. При этом происходит изменение параметров во флуктуационно-диссипационных соотношениях и процесс, в котором доминировали локальные корреляции, сменяется процессом с диссипативной доминантой. Результатом этого является формирование однородного состояния, которое можно назвать фоновым равновесием. Рассмотрены условия создания, времена релаксации и формирования фонового равновесия. Дальнодействующие силы Ван-дер-Ваальса в состоянии равновесия среды формируют объемно-распределенную линейно-упругую силу с линейной плотностью. На основе теории Власова строится математическая модель, описывающая колебания вокруг положения равновесия (однородного распределения) в такой системе.

**Ключевые слова:** СВЧ-диапазон, структура воды, коллективные движения, силы Ван-дер-Ваальса.

## MECHANISMS OF INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC MICROWAVE FIELD WITH WATER-SATURATED GEOSTRUCTURES. PART 1. BACKGROUND EQUILIBRIUM OF WATER STRUCTURES

Volodin I.A.<sup>1</sup>, Andreev S.N.<sup>2</sup>, Savranskii V.V.<sup>2</sup>

1 – OGRI RAS, 2 – Prokhorov General Physics Institute RAS  
E-mail: savr@nsc.gpi.ru

**Abstract.** The processes of self-organization of the field of water perturbations that depend on the achievement of background equilibrium and are an important factor keeping the

pyramid of collective movements from destruction are considered. The equilibrium state itself is a generalized dissipative structure, which requires an influx of energy for its formation. After the formation of some aggregate of dissipative structures in the medium and the continued pumping of energy into this medium, the dissipation process continues, leading to interaction (at the noise level) between these structures. In this case, the parameters change in the fluctuation-dissipation relations and the process in which local correlations dominate is replaced by a process with a dissipative dominant. The result is a homogeneous state, which can be called background equilibrium. The conditions of creation and the times of relaxation and the formation of background equilibrium are considered. The long-range Van der Waals forces in a state of equilibrium of a medium form a body-distributed linearly elastic force with a linear density. On the basis of the Vlasov theory, a mathematical model is constructed describing oscillations around the equilibrium position (uniform distribution) in such a system.

**Keywords:** microwave range, water structure, collective movements, Van der Waals forces.

При формировании термодинамического равновесия в среде процесс диссипации энергии связан с перекачкой энергии в более быстрые (высокочастотные), тепловые движения. В результате этого происходит насыщение энергией фазового пространства движений (колебаний) теплового масштаба (диапазона), что прекращает действие механизма диссипации. Можно сказать, что после формирования фонового равновесия (динамический) коэффициент диссипации равен нулю, а величина некоторого его параметра, который в дальнейшем будет называться структурным фактором, максимальна.

Сформированное фоновое равновесие является основой для проявления нелокальных свойств воды, так как оно характерно для однородного состояния, суть которого как раз состоит в сочетании локальных и глобальных свойств. Действительно, глобальные свойства однородного состояния определяются в силу однородности свойствами составляющего его элемента.

Физически эта нелокальность проявляется в том, что точки среды оказываются «привязанными» к глобальной (неподвижной) системе координат, параметризующей весь рассматриваемый объем воды. Это, в частности, проявляется в том, что возникает сила, пропорциональная смещению точек среды относительно этой системы отсчета.

Коэффициент пропорциональности в этой зависимости и является *структурным фактором*.

Процесс формирования фонового равновесия необходимо рассматривать как на акустической, так и на электромагнитной ветвях совокупности процессов в среде. Формирование равновесия на множестве квазирезонансных структур приводит к фоновому равновесию в некотором объеме воды. Оно имеет вид пространственно-распределенного резонанса очагового типа, реализующего собой неустойчивое равновесие, которое, как и всякая неустойчивость, имеет различные каналы выхода из равновесия.

Для описания динамики перехода среды в состояние равновесия удобно использовать язык фазовых переходов в ансамбле квазичастиц [1]. Его суть состоит в том, что динамика поля возбуждений разлагается на элементарные составляющие, называемые квазичастицами, что математически соответствует первичному квантованию поля. После этого исследование динамики поля сводится к моделям термодинамики газа этих квазичастиц.

Наиболее важными для анализа поля возбуждений среды являются два типа квазичастиц: фононы – элементарные коллективные возбуждения, соответствующие гармоническим колебаниям атомов решетки кристалла вокруг их равновесных положений; экситоны – электронные бестоковые возбуждения кристаллов, которые возникают при возбуждении атомов без ионизации, однако из-за взаимодействия между атомами не локализуются в определенной ячейке, а распространяются по всей кристаллической системе.

Поле высокочастотных возбуждений среды можно представить как фононный газ, в котором при начально слабом взаимодействии между частицами с развитием резонансных связей нарастает вклад от многочастичного взаимодействия, изменяющий фазовое состояние ансамбля.

Аналогичная картина должна наблюдаться и в поле экситонов, которая может быть более эффективно исследована с помощью изложенной ниже в данной статье теории Власова, определяющей равновесные состояния для ансамбля нелокальных частиц, какими, в частности, являются экситоны. Более подробно об этом сказано в работе [2].

Следует отметить, что формирование фонового равновесия на электромагнитной ветви связано с динамикой микромасштаба, которая ответственна за стабильность

пирамиды коллективных движений. Эти процессы определяются динамикой электронной плазмы; одним из их реализаций служит *длинноволновое флуктуационное электромагнитное поле*, являющееся следствием состояния равновесия во множестве квантовых флуктуаций.

Существует большое количество работ по исследованию фонон-экситонных взаимодействий [1]. Эти взаимодействия имеют разные типы, разную динамику, а в целом приводят к совместному равновесию между электромагнитной и акустической ветвями, которое будет проявлено в коллективных движениях наличием структурного фактора, а в электромагнитных явлениях – участием в формировании длинноволнового электромагнитного поля.

С точки зрения квантовой теории появление этого поля связано с возникновением фазовой когерентности в ансамбле обменных фотонов между квантовыми флуктуациями в микроструктуре вещества [3]. Само появление классических эффектов, движений и так далее обязано свойствам когерентности в квантовом строении вещества, которое «сшивает» классические объекты из квантовой материи. «Стартовая ступень» метода многомасштабных разложений, связывающая первый и второй масштабы коллективных движений, основана на свойствах когерентности движений среды на микромасштабе. Попытка подхода к описанию когерентных состояний среды была предпринята в [3], получив свое развитие в [4].

Для конкретизации дальнейшего исследования вводится условие, выполнимость которого требует, вообще говоря, отдельных исследований как теоретических, так и экспериментальных.

Условие 1 на микропроцессы. *Время релаксации и формирования фонового равновесия при рассматриваемых далее типах возмущений геосреды существенно меньше характерного масштаба времени для этих возмущений и  $\approx 10^{-10} - 10^{-11}$  с.*

Возможность реализации данного условия определяется тем, что рассматриваемый случай является аналогом ситуации с динамикой ленгмюровских волн в плазме, когда движение тяжелых ионов, то есть акустической ветви возмущений среды, и волны в электронной плазме, в которой происходит формирование фонового равновесия, происходят в различных временных масштабах. Согласно этому условию время релаксации при достижении электронной плазмой состояний, близких к равновесию,

меньше характерных времен в динамике коллективных движений, поэтому состояние фонового равновесия при выполнении условия квазистабильно.

Далее предполагается, что среди всех типов физических взаимодействий в среде *основным носителем состояния фонового равновесия можно считать длинноволновое флуктуационное электромагнитное поле*. Для электрически нейтральной среды основными действующими силами, формирующими состояние фонового равновесия в конденсированной среде, связанного, в частности, с появлением периодических электрических потенциалов типа кристаллической решетки, являются силы флуктуационного происхождения – силы Ван-дер-Ваальса. В [1] показано, что характерные расстояния микромасштаба совпадают с масштабами действия этих сил.

Силы Ван-дер-Ваальса порождаются электромагнитными взаимодействиями между естественными квантовыми флуктуациями в электронной подсистеме атомов и молекул вещества. Среди них различаются три типа: ориентационные, индукционные и дисперсионные. Указанные типы связаны с различными силами взаимодействия, возникающими между отдельными флуктуациями в квантовой системе, содержащими определенные распределения зарядов, токов, а также спинов содержащих их частиц.

В качестве объемно-распределенных нелокальных сил рассматриваются квазистатические физические поля в геосреде, носители фонового равновесия в динамике большой совокупности процессов, протекающих в ней. Это флуктуационное длинноволновое электромагнитное поле, которое, с одной стороны, будут создавать и с которым, с другой стороны, будут взаимодействовать квантовые электромагнитные флуктуации среды.

В результате этих взаимодействий формируется некоторое состояние равновесия, механизм формирования которого описывается флуктуационно-диссипационными соотношениями типа Каллена-Вельтона [5]. Условием появления состояния равновесия можно считать, в частности, установившиеся поляризационные свойства среды, которые будут контролировать типы самих флуктуаций.

Механизм достижения равновесия является механизмом формирования вакуумного флуктуационного электромагнитного поля, значения которого во всех точках коррелированы друг с другом. Вследствие этого, если в двух различных точках помещены атомы, вакуумное поле будет индуцировать в этих атомах флуктуирующие дипольные моменты, значения которых в свою очередь также оказываются скоррелированными друг

с другом. Искомое взаимодействие, соответствующее фоновому равновесию, представляет собой усредненное запаздывающее взаимодействие атомных диполей, индуцированным квантовым вакуумным флуктуационным электромагнитным полем.

Необходимость учета этого поля в теории равновесных состояний совокупности электромагнитных флуктуаций имеет следующее физическое объяснение. Наличие спонтанных квантовых флуктуаций плотностей токов и зарядов в среде, находящейся в равновесном состоянии, если не учитывать влияния вакуумного поля, приводит к постоянному излучению электромагнитных волн и потере энергии на излучение. Завершением этого процесса является создание вакуумного электромагнитного поля. Оно рассматривается как часть замкнутой системы, включающей в себя и геосреду, совершает работу, компенсируя ее потери на излучение, и тем самым обеспечивает устойчивость основного (равновесного) состояния геосреды. С точки зрения динамики свободных фотонов можно сказать, что в системе появляется динамическое равновесие.

С точки зрения квантовой теории появление этого поля электромагнитного равновесия в микроструктуре вещества связано с возникновением фазовой когерентности в ансамбле обменных фотонов, осуществляющих взаимодействие между квантовыми флуктуациями. Соотношения, описывающие эти состояния (например, 5.170 в [6]), используют только характеристики длинноволнового электромагнитного поля. Исключение из рассмотрения коротковолнового поля означает исключение непосредственного самодействия той или иной отдельной малой конденсированной частицы, что как раз соответствует исключению локальных эффектов и переходу к нелокальному описанию. Строго говоря, указанное выше обменное взаимодействие является короткодействующим, локальным. Свойства нелокальности ему придает именно сформированное равновесие, переводящее взаимодействие в длинноволновую часть спектра.

В [7] показано, что для равновесного флуктуационного длинноволнового электромагнитного поля термодинамические характеристики и, в частности, тензор напряжений могут быть в общем виде выражены через диэлектрические проницаемости конденсированных тел. Энергия флуктуационного электромагнитного поля в присутствии конденсированных сред должна содержать и энергию Ван-дер-Ваальсова взаимодействия,

так как энергия электромагнитного поля в присутствии заряженных частиц содержит энергию электромагнитного взаимодействия между частицами.

Таким образом, задача о вкладе Ван-дер-Ваальсовых сил в термодинамические характеристики конденсированных сред является задачей о вкладе в соответствующие величины характеристики длинноволнового флуктуационного электромагнитного поля. Это позволяет в теории Ван-дер-Ваальсовых сил использовать результаты теории равновесных электромагнитных флуктуаций в конденсированных средах, а также термодинамику полностью ионизированной однородной и неоднородной плазмы. Это обстоятельство будет использовано ниже при рассмотрении колебаний вокруг состояний равновесия длинноволнового флуктуационного электромагнитного поля.

Для конкретной работы с теоретической моделью необходимо оценить возможность теоретической оценки величины структурного фактора. При описании электромагнитных процессов в геосреде можно рассматривать приближение, когда связанное с дисперсионным взаимодействием электростатическое поле создается перераспределением электронов в веществе при неподвижных ионах. Например, Р. Фейнманом [8] было обосновано, что Ван-дер-Ваальсово взаимодействие можно рассматривать как возникающее вследствие перераспределения средней плотности электрического заряда во взаимодействующих атомах. В этом случае для описания процесса формирования равновесного электростатического поля, ответственного за формирование структурного фактора в воде, может быть использована динамическая теория электронной плазмы, построенная Власовым [9], которая применяется для случая ансамбля слабо связанных электронов.

Так как уравнения Власова описывают динамику ансамблей нелокальных частиц, практически, любой природы, разработанный им математический аппарат применим и для нелокальных квазичастиц – экситонов, которые также играют свою роль в формировании фонового равновесия. Поэтому выводы, получаемые из этих уравнений, применимы для различных электромагнитных процессов в среде, приводящих к формированию фонового равновесия, одинаково, то есть по идентичным формулам.

Указанные уравнения, вообще говоря, дают возможность оценить время релаксации процессов, достижения равновесия на различных пространственно-временных масштабах, а также различных частот флуктуационного поля. Данная теория позволяет исследовать условия выполнимости условия 1 на микромасштабе.

Согласно этой теории уравнение Власова для частиц одного сорта (в данном случае электронов, квантовых флуктуаций или экситонов) имеет вид:

$$-\partial f/\partial t = \operatorname{div}_r v f - (1/m) \operatorname{div}_v(\operatorname{grad}_r V) f, \quad (1)$$

где  $\rho(r, u)$  – плотность распределения заряда,

$$V(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(|r - u|) \rho(r, u) du, \quad (2)$$

а  $f(r, v, t)$  – функция плотности распределения частиц (флуктуаций) в геосреде, определенная на фазовом пространстве координат и скоростей.

Уравнение (1) имеет точное решение, соответствующее равномерному распределению частиц в пространстве, или состоянию термодинамического равновесия, в виде функции распределения  $f(v^2)$  в пространстве скоростей. Малое возмущение состояния равновесия

$$f(r, v, t) = f_0(v^2) + \varphi(r, v, t) \quad (3)$$

приводит к линеаризации основного уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \operatorname{grad}_r \varphi = \frac{1}{m} \operatorname{grad}_v f_0 \operatorname{grad}_r \int_{-\infty}^{\infty} K(|r - u|) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u, w, t) du dw, \quad (4)$$

при  $\varphi \ll f_0$ . Как показано в [8], с помощью преобразования Лапласа это уравнение сводится к уравнению Вольтерра, для которого решение может быть выписано в явном виде. Когда  $f_0(v^2)$  и начальное возмущение функции  $\varphi$  описывается приближенным выражением максвелловского закона распределения, характерного для статистических ансамблей Гиббса, все участвующие в решении интегралы берутся точно. Для каждого волнового вектора  $k$  два варианта решения в зависимости от функции, описывающей взаимодействие, имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) \varphi_k(t) &= a_k \exp(-k\gamma t) \operatorname{ch} \omega_1 t, \text{ при } \sigma(k) < 0, \omega_1^2 = -\sigma(k)k^2 N/m, \\ 2) \varphi_k(t) &= a_k \exp(-k\gamma t) \cos \omega_0 t, \text{ при } \sigma(k) > 0, \omega_0^2 = \sigma(k)k^2 N/m, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\gamma^2 = 2kT/m$ ;  $N, k, T$  – параметры распределения Максвелла,

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k} \int_0^{\infty} K(u) u \sin ku du. \quad (6)$$

В первом описанном в [7] случае возникает неустойчивость исходного состояния с равномерной плотностью с чисто релаксационным механизмом затухания. Решение задачи Коши во втором случае, который как раз и соответствует исследуемому в

настоящей статье близкое действие Ван-дер-Ваальса или кулоновскому взаимодействию между частицами, приводит к вибрационно-диффузионному характеру распространения возмущений в плотности, к упругому отклику среды, причем собственные частоты и декремент затухания для произвольных сил, вообще говоря, существенно зависят от волнового вектора  $k$ .

Действие упругой силы, пропорциональной смещению, определяется коэффициентами  $a_k$  в начальный момент воздействия, так как последующее затухание связано, вообще говоря, с динамикой свободной плазмы частиц, для которой рассматривались эти уравнения [3]. В веществе геосреды в системе молекулярных связей электроны находятся в частично связанных состояниях, которые и рассматриваются как квазичастицы, в результате чего процесс релаксации будет носить с другими константами несколько иной характер, чем в свободной плазме.

Поэтому можно сказать, что распределенная в объеме сила реакции на возмущение нелокального происхождения, порожденная фоновым равновесием электромагнитного поля, *пропорциональна величине и плотности флуктуации, порожденной смещением  $\alpha(k)$  при слабом возмущении среды*, где аналог «модуля Юнга» имеет вид:

$$\alpha(k) = a_k \sigma(k) k^2 N/m, \quad (7)$$

то есть существенно зависит от волнового вектора. Чтобы перейти к скалярным параметрам геосреды необходимо провести осреднение «модуля Юнга»  $\alpha(k)$  и «коэффициента трения»  $\gamma(k)$  по величине и направлению волнового вектора  $k$  и обозначить  $\alpha$  и  $\gamma$  соответствующие средние значения.

Возникающие осцилляции происходят с трением, с затуханием, но они связаны с процессами релаксации фонового равновесия в плазме частиц, а не с диссипацией в коллективных движениях, поэтому они не будут учитываться при формировании основных динамических уравнений.

В работе [9] также показано, что описанные решения могут быть интерпретированы как система периодических страт, формируемая установившимся волновым полем, которые возникают скачкообразно из состояния равновесия. Установлено, что существует связь между колебательными свойствами ансамбля частиц и параметрами стратов. При их образовании возникает периодический потенциал типа кристаллической решетки, для которой определяется аналог линейной упругости с

модулем Юнга – коэффициентом пропорциональности величине и плотности флуктуации, порожденной смещением при слабом возмущении среды.

Таким образом, дальнедействующие силы Ван-дер-Ваальса в состоянии равновесия среды формируют объемно-распределенную линейно-упругую силу с линейной плотностью  $\alpha_{\text{ли}}$ , которая при слабом возмущении среды на пространственно-временном микромасштабе пропорциональна смещению. Эта сила формируется либо на однородном распределении, либо на почти периодической решетке страт электромагнитного фона, возникающего из фонового равновесия множества излучений макроскопических флуктуаций в системе, а соответствующая сила пропорциональна смещению относительно минимумов периодического потенциала.

Кроме того, при наличии потенциальных барьеров в среде, связанных, например, с фазовыми или геологическими границами и тектоническим строением, возможно образование резонаторов на частотах инфракрасного диапазона, в которых при определенных значениях волнового вектора происходит увеличение «модуля Юнга»  $\alpha(k)$  и уменьшение «коэффициента трения»  $\gamma(k)$ , то есть ускорения процесса релаксации. Иными словами, указанные величины в геосреде зависят от множества различных факторов. Его прямое вычисление является трудно достижимой задачей. Однако *при построении последующей теории достаточным является само существование отличного от нуля структурного фактора*, а его косвенное определение представляется возможным при сопоставлении некоторых выводов теории на различных масштабах с экспериментальными фактами.

Описанный выше «структурный фактор»  $\alpha$  носит релаксационный характер, то есть зависит от степени достигнутого в среде равновесия. При появлении же в среде длинноволновых возмущений его величина, вообще говоря, уменьшается, а процесс их восстановления связан с формированием нового состояния фонового равновесия.

Следствием условия 1 на микропроцессы является относительное постоянство величины структурного фактора  $\alpha$  во времени микромасштаба и малость коэффициента диссипации  $\gamma$ , включая и условия диссипации по пространственным переменным. Эти предположения будут использованы при получении основного динамического уравнения для геосреды и разработке метода многомасштабных разложений.

Рассматривая частицы и флуктуации как ансамбль квазичастиц, а взаимодействие между ними – через длинноволновое электромагнитное поле с потенциалом  $K$ , на основе

теории Власова строится математическая модель, описывающая колебания вокруг положения равновесия (однородного распределения) в такой системе. При ее построении предполагается, что время достижения равновесия меньше периода этих колебаний, что позволяет игнорировать процесс запаздывания.

Основой для построения эффективной физико-математической теории является понятие *коллективного движения*. В современной физике изучение коллективных эффектов составляет наиболее трудную и интересную область. Наиболее продвинутым с точки зрения объема исследований является круг вопросов, связанных с когерентными состояниями и коллективными эффектами в квантовой теории [10]. Однако в последние десятилетия получили развитие и классические представления о коллективных движениях в нелинейных волновых процессах [11], которые положены в основу работы [3].

Классическое движение тела или сплошной среды описывается как совокупность движений отдельных его элементов (точек). Поэтому можно сказать, что описание классического движения материальных объектов строится с масштаба микроуровня их строения. При своем движении тело сохраняет целостность, если в микродвижениях его элементов существует общая для всех *коллективная* составляющая, которая, собственно, и определяет классическое движение тела. В физике такая составляющая называется *огибающей микродвижений*.

Если эта огибающая в объеме тела начинает разбиваться на разные фрагменты, соответствующие какому-либо разбиению его объема, возникает несогласованное движение отдельных его частей, что соответствует процессу разрушения тела и переходу движения на более крупные масштабы, где движение идентифицируется на более мелких пространственно-временных интервалах. В этом случае энергия коллективного движения переходит в энергию более крупного масштаба, энергию разрушения тела.

### **Выводы**

Результатом развития приведенных представлений может стать описание системной организации коллективных движений геосреды, представляющей собой некоторую «лестницу» или «пирамиду» масштабов. Движение на каждом масштабе является огибающей движений на всех предыдущих, более крупных масштабах, то есть, модулирует эти движения и имеет высокочастотное заполнение. Именно описанный механизм модуляции движений разных масштабов и составляет физическую суть математического метода многомасштабных разложений.

*Статья написана в рамках выполнения государственного задания (тема «Энергетика, динамика и дегазация Земли, теоретические и экспериментальные основы инновационных сейсмоакустических технологий исследования геологической среды и контроля за объектами нефтегазодобычи», № АААА-А16-116021510125-7 и тема «Лазерные технологии», № АААА-А18-118022090038-6).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Бродин М.С., Блонский И.В., Нимцович Б.М., Нимцович В.В.* Динамические эффекты в многокомпонентном газе квазичастиц. Киев: Наукова думка, 1990. 176 с.
2. *Володин И.А.* Энергоструктура Земли и квантовая геодинамика // *Фундаментальный базис новых технологий газовой промышленности: Сб. ст.* М.: Наука, 1999. С. 36–41.
3. *Володин И.А.* Нелинейная динамика геологической среды. М.: ГУП «ВИМИ», 1999. 230 с.
4. *Володин И.А.* Системно-геодинамические исследования на объектах газовой промышленности // *Газовая промышленность.* 1997. № 7. С. 10–13.
5. *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. М.: Наука, 1990. 320 с.
6. *Бараш Ю.С.* Силы Ван-дер-Ваальса. М.: Наука, 1988. 344 с.
7. *Дзялошинский И.Е., Питаевский Л.П.* Ван-дер-Ваальсовы силы в неоднородном диэлектрике // *ЖЭТФ.* 1959. Т. 36. С. 1797–1805.
8. *Feuntau R.P.* Forces in Molecules // *Phys. Rev.* 1939. Vol. 56. P. 340–343.
9. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 348 с.
10. *Марч Н., Янг У., Сампантхар С.* Проблема многих тел в квантовой механике. М.: Мир, 1969. 496 с.
11. *Додд Р., Эйблек Дж., Гиббон Дж., Норрис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 692 с.