

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОВОДИМОСТИ СКВАЖИННОГО СОЕДИНЕНИЯ – ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД СТЕНФОРДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Э.С. Закиров, С.Н. Закиров, И.М. Индрупский, Д.П. Анিকেев  
ИПНГ РАН, e-mail: ezakirov@ogri.ru

В данной статье обозревается полуаналитический метод Стенфордского университета для вычисления коэффициента проводимости скважинного соединения скважины произвольной траектории. Она является продолжением статей\* данного номера журнала. В некотором смысле, рассматриваемая статья завершает обсуждение методов вычисления исследуемой величины для прогрессивных скважин, ставя «жирную точку» в этом вопросе. Всем гидродинамикам, осуществляющим моделирование скважин сложной траектории, рекомендуется использовать данный метод для вычисления коэффициента проводимости.

Описываемый ниже подход является плодом труда целого коллектива исследователей в Стенфордском университете (в том числе магистрантов, докторантов). Можно отметить работы [1, 2, 3, 4, 5], составившие основу рассматриваемого метода. На сегодняшний день предлагаемый подход реализован в программном продукте AdWell, используемом рядом компаний [6]. Программа разработана и поддерживается Dr. Huanquan Pan [7].

Данный метод разработан для точной оценки проводимости ячейки, вскрытой скважиной нетрадиционного типа в сложных сеточных областях. Основной недостаток – использование метода предполагает режим истощения пластовой энергии, но вполне можно считать, что данное условие не является сильно ограничивающим.

Метод основан на решении однофазной фильтрационной задачи в локальной околоскважинной области. Обычно эта локальная область представляет собой зону дренирования скважины. Из-за особенностей полуаналитического решения данная

---

\* См. статьи:

*Закиров Э.С., Закиров С.Н., Индрупский И.М., Анিকেев Д.П.* «О представлении скважины в 3D гидродинамической модели»;

*Закиров Э.С., Закиров С.Н., Индрупский И.М., Анিকেев Д.П.* «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения. Метод Писмена и близкие подходы»;

*Закиров Э.С., Закиров С.Н., Индрупский И.М., Анিকেев Д.П.* «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения наклонной или горизонтальной скважины»;

*Закиров Э.С., Закиров С.Н., Индрупский И.М., Анিকেев Д.П.* «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения на сетке Вороного» в данном выпуске.

область должна иметь форму прямоугольного параллелепипеда.

Отличительной особенностью данной задачи является ее существенная зависимость от условий, заданных на скважине. Граничные условия могут представлять собой или постоянный заданный потенциал, или условие непротекания. Как оказалось, вычисляемая проводимость скважинной ячейки слабо зависит от типа применяемых граничных условий. С вычислительной точки зрения наиболее удобным оказалось задание суммарного дебита скважины и условий непротекания на всех внешних границах, за исключением нижней грани модели, на которой задается постоянное давление. Поскольку в этом случае скважина выходит на стационарный режим и удается избежать нестационарных вычислений.

При решении задачи вычисления коэффициента проводимости скважинного соединения дискретизации подвергается траектория скважины, а не пласт. При этом ствол скважины разбивается на сегменты, что снижает потребности в вычислительных ресурсах.

Контрольное решение, включающее забойное давление, определяется полуаналитически, основываясь на функциях Грина. Как только соответствующее решение найдено, специальный алгоритм определения пересечений скважины с сеточными блоками идентифицирует сеточные блоки, вскрытые скважиной, и осуществляет распределение дебита скважины по сеточным интервалам.

Это необходимый этап, поскольку сегмент может не совпадать в точности с одной сеточной ячейкой. Затем используется традиционное конечно-разностное моделирование в той же самой околоскважинной области с теми же граничными условиями. При этом для неоднородных коллекторов мелкомасштабная проницаемость должна быть промасштабирована на целевую сетку. Отличие численной задачи от аналитической состоит в том, что источники и стоки определены при помощи полуаналитического решения. Соответственно, совместное использование сеточных давлений (как результатов конечно-разностных вычислений) и дебитов вместе с забойным давлением (из полуаналитического контрольного решения) позволяет вычислять точные проводимости скважинной ячейки при помощи уравнения

$$T_{wi} = \frac{q_i^w \mu}{P_i - P_i^w} . \quad (1)$$

Здесь  $q_i^w$  – объемный расход интервала  $i$ -й скважины,  $\mu$  – вязкость флюида,  $P_i$  – давление в сеточном блоке,  $P_i^w$  – давление в скважине.

Данный метод отличается наибольшей общностью и повышенной функциональностью. Он позволяет точно моделировать очень сложные (например, многозабойные) скважины или даже группы скважин, которые пересекают сетку произвольным образом. Может использоваться сетка любого типа, если только на ней можно проводить однофазные вычисления конечно-разностным методом.

Кроме того, метод вычисления проводимости скважинной ячейки основывается на вычислениях по определенной пользователем локальной околоскважинной области, а не по отдельным сеточным блокам, профильным разрезам или бесконечным областям. В этом он выгодно отличается от предыдущих подходов. При этом данный способ не ограничен контрольным решением. Однако, это аналитическое решение доказало свою максимальную точность для однородных полей и приемлемую точность для случаев неоднородных полей проницаемости. Этот метод учитывает сферичность притока к концам скважины, а также взаимодействие с другими скважинами и границами.

Значительно позднее в работе [8] был представлен близкий полуаналитический подход, основанный на функциях Грина и его третьем тождестве.

Итак, полуаналитический метод вычисления проводимости скважинной ячейки основан на использовании полученных полуаналитическим способом следующих переменных: забойного давления и распределения притока к скважине, а также пластовых давлений, полученных численным конечно-разностным моделированием. По определению, проводимость скважинной ячейки может быть вычислена напрямую с использованием формулы (1).

Первый шаг в данном подходе состоит в точном вычислении притоков к скважине и забойных давлений для каждого сегмента ствола скважины. При помощи полуаналитического метода, основанного на функциях Грина, для решения однофазной фильтрационной задачи:

$$\nabla \cdot (k \nabla \Phi) = m \mu c_i \frac{\partial \Phi}{\partial t} . \quad (2)$$

Уравнение (2) соответствует однофазному течению слабосжимаемого флюида. Условные обозначения общеизвестны. Данное уравнение записывается относительно потенциала  $\Phi = p + g \rho z$  для учета эффекта действия гравитационных сил. Дополнительно к уравнению (2) необходимо задать соответствующие начальные и граничные условия.

Для получения искомого решения только скважина дискретизируется на сегменты,

без дискретизации пласта. После того, как решение получено для каждого сегмента, контрольные дебиты каждого блока, вскрытого скважиной, определяются по специальному алгоритму детекции пересечений блоков со скважиной. По этим дебитам вычисляют пластовые давления с использованием однофазного конечно-разностного симулятора (рис. 1).

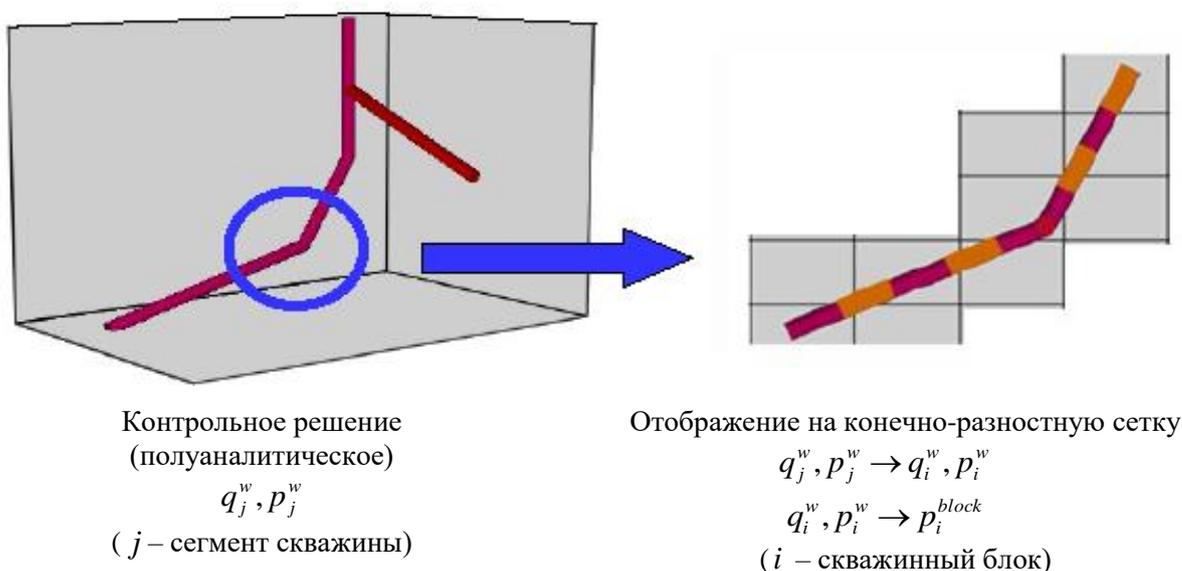


Рис. 1. Аналитическое решение (приток к скважине и давление) и его связь с конечно-разностной сеткой (давления в блоках)

Наконец, полуаналитическую проводимость скважинной ячейки получают комбинацией дебита скважины и забойного давления из полуаналитического решения и соответствующего давления в сеточном блоке из однофазного конечно-разностного моделирования при помощи формулы (1). При нахождении единственного значения  $WI$  для каждого блока дебиты и давления должны быть получены для стационарных или псевдостационарных условий.

Для включения в модель околоскважинной неоднородности в работе [9] предложен подход, называемый « $S - k^*$  моделью» [10]. В рамках данной модели неоднородность проницаемости представляется при помощи постоянной фоновой проницаемости  $k^*$  и локального скин-эффекта  $S$ . Фоновую проницаемость получают степенным осреднением или любым другим методом upscaling'a [11]. Например, решением линейной фильтрационной задачи на полной геологической сетке. Скин-эффект изменяется вдоль траектории скважины. Околоскважинная проницаемость измененной зоны  $k_{a,j}$  для

каждого сегмента  $j$  вычисляется через интегрирование с весами значений мелкомасштабной проницаемости вдоль сегмента по области с эффективным радиусом  $r_{a,j}$ . Применение формулы Хоукинса для скин-фактора [12] позволяет вычислить значение скин-фактора  $S_j$  для каждого сегмента:

$$S_j = \left( \frac{k^*}{k_{a,j}} - 1 \right) \ln \frac{r_{a,j}}{r_w} . \quad (3)$$

Тогда значение скин-эффекта включается в систему линейных уравнений, описывающую приток в индивидуальные сегменты скважины. Использование модели  $S - k^*$  незначительно усложняет базовый полуаналитический подход.

Публикации [9, 13, 14] подтверждают приемлемую точность результатов применения описанной методики для ряда тестовых примеров на основании их сравнения с контрольными конечно-разностными вычислениями.

Все сказанное позволяет точно моделировать скважины с различными траекториями, пересекающими сеточную область произвольным образом. Рассматриваемый метод учитывает сферичность притока к концам скважины, а также взаимодействие с другими скважинами и границами.

Сама вычислительная часть реализована в симуляторе AdWell в рамках проекта SUPRI-NM в Стенфордском университете.

От словесного описания на уровне понимания идеи метода перейдем к деталям ее реализации на уровне формул.

Предполагается, что проницаемость  $k$  является диагональным тензором. Тогда уравнение (2) может быть записано в следующем виде:

$$k_{xx} \frac{\partial^2 \Phi}{x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 \Phi}{y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 \Phi}{z^2} = m\mu c_t \frac{\partial \Phi}{\partial t} . \quad (4)$$

Скважины могут иметь произвольную конфигурацию и траекторию (рис. 2). Каждая скважина  $i_w$  из общего числа скважин  $n_w$  может иметь  $n_l(i_w)$  боковых стволов, каждый из которых состоит из  $n_s(i_w, i_l)$  сегментов. Общее число сегментов равно  $N_s$ :

$$N_s = \sum_{i_w=1}^{n_w} \sum_{i_l}^{n_l(i_w)} n_s(i_w, i_l) . \quad (5)$$

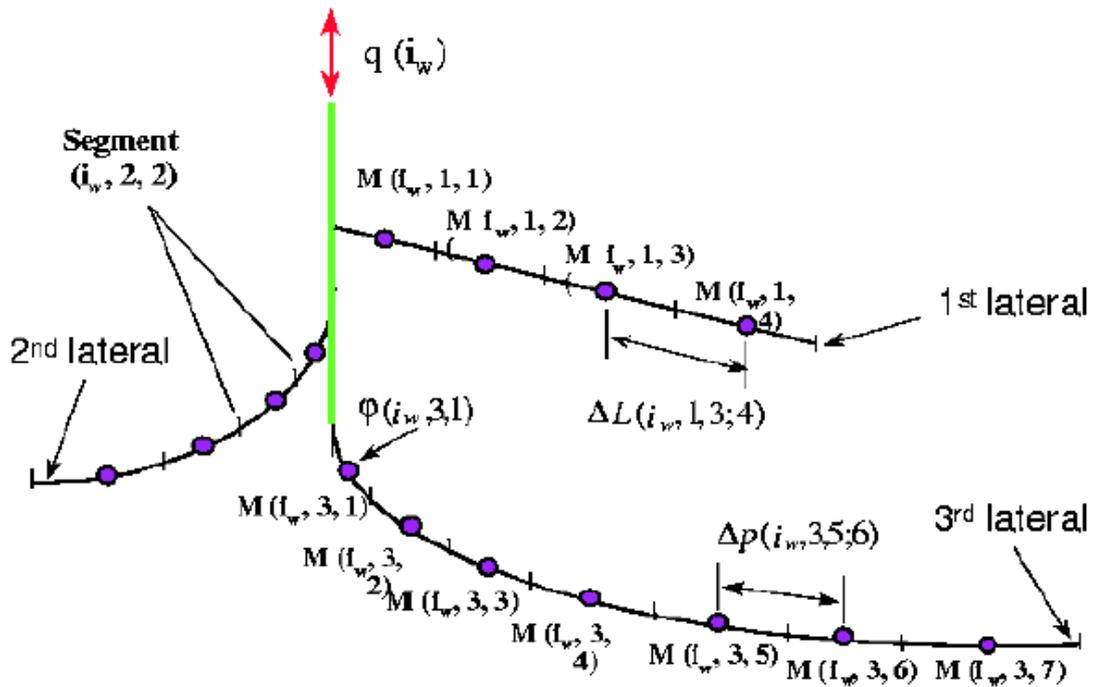


Рис. 2. Произвольная конфигурация скважины (из работы [15])

Перемасштабированием координатных осей отродотропно-анизотропную среду можно заменить изотропной. Соответствующие формулы преобразования и пересчета радиуса скважины можно найти в работе [16]. При этом скважина из круга превращается в эллипс. В новой системе координат уравнение (4) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{z'^2} = \frac{m\mu c_t}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial t} . \quad (6)$$

Затем осуществляется обезразмеривание всех переменных уравнения (6), когда все размерные переменные превращаются в безразмерные величины в диапазоне от 0 до 1. Обезразмеривание приводит к переменным  $t_D, q_D, \Phi_D, x_D, y_D, z_D$  и уравнению:

$$\nabla^2 \Phi_D = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t_D} .$$

Совместная модель пласт–скважина имеет  $2N_s$  неизвестных. Они суть следующие: безразмерные дебиты притока (оттока)  $q_D(i_w, i_l, i_s)$  и депрессия  $\Phi_{wD}(i_w, i_l, i_s)$  в средней точке  $M(i_w, i_l, i_s)$  каждого сегмента скважины  $i_w$  (см. рис. 2). Следовательно, для корректного описания системы необходимо такое же число уравнений. Эти уравнения

получают из условия баланса массы, соотношений для депрессии с учетом гидравлической характеристики течения на забое.

Закон сохранения массы требует, чтобы расход каждой скважины равнялся сумме вкладов (расходов) всех сегментов скважины:

$$\sum_{i_w=1}^{n_w(i_w)} \sum_{i_s=1}^{n_l(i_w, i_l)} q_D(i_w, i_l, i_s) = q_D(i_w), \quad (7)$$

где  $i_w = 1, \dots, n_w$ . В соответствии с принципом суперпозиции значение депрессии в любой точке пространства может быть выражено в виде суммы вкладов от всех источников/стоков в системе. При рассмотрении депрессии в каждом сегменте системы принцип суперпозиции дает:

$$\Phi_D(j_w, j_l, j_s) = \sum_{j_w=1}^{n_w} \sum_{j_l=1}^{n_w(j_w)} \sum_{j_s=1}^{n_s(j_w, j_l)} q_D(j_w, j_l, j_s) \Phi_D(j_w, j_l, j_s) [M(i_w, i_l, i_s)], \quad (8)$$

где  $\Phi_D(j_w, j_l, j_s) [M(i_w, i_l, i_s)]$  представляет собой безразмерную депрессию в середине сегмента  $j_s$  бокового ствола  $j_l$  скважины  $j_w$ , вызванную источником/стоком единичной интенсивности сегмента  $i_s$  бокового ствола  $i_l$  скважины  $i_w$ .

Безразмерная величина депрессии может быть вычислена при помощи функций мгновенного источника/стока. Например, для одномерной системы с непроницаемыми границами в безразмерных координатах 0 и 1 безразмерный перепад давления в точке  $x$  в момент времени  $t$ , вызванный мгновенным источником единичной интенсивности в точке  $x_0$  в начальный момент времени, может быть вычислен по формуле:

$$S_x(x, x_0, t_D) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k^2 \pi^2 t_D) \sin k \pi x \cos k \pi x_0 = \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t_D}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(x-2k-x_0)^2}{4t_D}\right) + \exp\left(-\frac{(x-2k+x_0)^2}{4t_D}\right) \right].$$

В [15] показывается, что оба представления формулы (9) эквивалентны. Оба выражения требуют суммирования бесконечных рядов. Однако, экспоненциальная форма сходится быстрее для малых  $t$ . Тогда как тригонометрический ряд имеет преимущество для больших  $t$ . Используя разделение переменных, решение трехмерной задачи может быть получено умножением одномерных решений типа (9). Интегрирование по времени решения трехмерной задачи дает непрерывное решение:

$$\Phi_{wD}(j_w, j_l, j_s)[M(i_w, i_l, i_s)] = \frac{1}{x_{De} y_{De} z_{De}} \int_0^{t_D} S_x \left( \frac{x_D, x_{D0}, t_D}{x_{De}, x_{De}, x_{De}} \right) S_y \left( \frac{y_D, y_{D0}, t_D}{y_{De}, y_{De}, y_{De}} \right) S_z \left( \frac{z_D, z_{D0}, t_D}{z_{De}, z_{De}, z_{De}} \right) dt_D. \quad (10)$$

Наконец, интегрирование точечных источников/стоков по скважинному сегменту  $[M_0, M_1]$  дает выражение для значения депрессии в середине каждого сегмента:

$$\Phi_D(j_w, j_l, j_s)[M(i_w, i_l, i_s)] = \int_{M_{D0}}^{M_{D1}} \left[ \Phi_{wD}(j_w, j_l, j_s)[M(i_w, i_l, i_s)] - \frac{1}{4\pi r_{wD}} \right] dM_D + \int_{M_{D0}}^{M_{D1}} \frac{1}{4\pi r_{wD}} dM_D. \quad (11)$$

Член  $1/4\pi r_{wD}$  добавлен и вычтен одновременно во избежание проблем со сходимостью при интегрировании (см. работу [17]), поскольку вблизи ствола скважины (на расстоянии радиуса скважины) решение сингулярно. Действительно, около точечного источника течение сферично, а давление изменяется обратно пропорционально расстоянию.

Потенциал представляет собой решение уравнения:

$$r_D^2 \frac{\partial \Phi_D}{\partial r_D} = \frac{1}{4\pi}. \quad (12)$$

Тем самым прием с вычитанием члена  $1/4\pi r_{wD}$  позволяет снизить сингулярность подынтегрального выражения первого интеграла. Второй интеграл можно вычислить аналитически. Допустим, скважина представлена сегментом  $[M_{D0}, M_{D1}]$ , а вклад интеграла оценивается в точке  $M$ . Обозначим угол  $(\overrightarrow{M_{D0}M_{D1}}, \overrightarrow{M_{D0}M})$  символом  $\beta$ , а длину  $[M_{D0}M]$  символом  $X$ . Тогда

$$I = \int_{M_{D0}}^{M_{D1}} \frac{1}{4\pi r_{wD}} dM_D = \frac{1}{4\pi L} \ln \left[ \frac{1 - \frac{X}{L} \cos \beta + \sqrt{\frac{X^2}{L^2} - \frac{2X}{L} \cos \beta + 1}}{\frac{X}{L} (1 - \cos \beta)} \right]. \quad (13)$$

Если сегмент скважины представлен не прямой линией, то рассматриваемый интеграл можно вычислить разбиением кривой на части.

К данному моменту большинство вычислительных шагов прояснено с достаточной степенью подробности. За дальнейшими нюансами использования метода

заинтересованный читатель отсылается к основополагающим работам, отвечающим на вопросы: как учесть гидравлические характеристики течения в стволе скважины, как решить полученную систему уравнений, как вычислить скин-фактор, как произвести учет забойных устройств, управляющих притоком и т.д.

Казалось бы, использование столь продвинутой вычислительной техники является крайне далеким вопросом при моделировании скважин нетрадиционных типов. Однако, как показывают значительное количество примеров работ [1, 2, 3, 4, 5], достаточно импортировать рассчитанные указанным сложным способом проводимости скважинных ячеек в коммерческий симулятор, чтобы сохранить точность аналитического моделирования в обычном гидродинамическом симуляторе.

Поэтому рекомендуется использовать AdWell в качестве предпроцессора подготовки проводимостей скважинных ячеек.

*Статья написана в рамках выполнения государственного задания (тема «Научное обоснование новых экологически чистых технологий разработки месторождений углеводородов в сложных горно-геологических условиях на основе 3D-компьютерных экспериментов», № АААА-А16-116022510270-1).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Fukagawa H.* Semianalytical Modeling of Nonconventional Well Performance in Realistic Reservoirs // Master's report. Stanford University, 2002.
2. *Serve J.* An Enhanced Framework for Modeling Complex Well Configurations // Master's Report. Stanford University, 2002.
3. *Valvatne P.H.* A Framework for Modeling Complex Well Configurations // M.S. Thesis. Stanford University, 2000.
4. *Wolfsteiner C., Aziz K., Durlofsky L.J.* Modeling Conventional and Non-Conventional Wells // Paper presented at 6<sup>th</sup> International Forum on Reservoir Simulation. Salzburg, Austria. 3–7 September 2001. 11 p.
5. *Wolfsteiner C., Durlofsky L.J., Aziz K.* Calculation of Well Index for Nonconventional Wells on Arbitrary Grids // Comp. Geosciences. 2003. Vol. 7. P. 61–82.
6. *Durlofsky L.J., Aziz K.* Advanced Techniques for Reservoir Simulation and Modeling of Nonconventional Wells // Final Report. 2004. August. 213 p.
7. *Pan H.Q.* AdWell 2.1 User Manual. Stanford University, 2005.

8. *Kurtoglu B., Medeiros F.Jr., Ozkan E., Kazemi H.* Semianalytical Representation of Wells and Near-Well Flow Convergence in Numerical Reservoir Simulation // Paper SPE 116136 prepared for presentation at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Denver, Colorado, USA, 21–24 September 2008. 20 p.
9. *Wolfsteiner C., Durlofsky L.J., Aziz K.* Approximate Model for Productivity of Nonconventional Wells in Heterogeneous Reservoirs // SPEJ. 2000. June. P. 218–226.
10. *Durlofsky L.J.* An Approximate Model for Well Productivity in Heterogeneous Porous Media // Mathematical Geology. 2000. Vol. 32. P. 421–438.
11. *Закиров Э.С.* Upscaling в 3D компьютерном моделировании. М.: ЗАО «Книга и Бизнес», 2007. 344 с.
12. *Hawkins M.F.* A Note on the Skin Effect // Trans. AIME. 1956. Vol. 207. P. 356–357.
13. *Valvatne P.H., Durlofsky L.J., Aziz K.* Semi-analytical modeling of the performance of intelligent well completions // Paper SPE 66368 prepared for presentation at the SPE Reservoir Simulation Symposium. Houston, Texas, 11–14 February 2001. 10 p.
14. *Wolfsteiner C., Durlofsky L.J., Aziz K.* Efficient estimation of the effects of wellbore hydraulics and reservoir heterogeneity on the productivity of nonconventional wells // Paper SPE 59399 prepared for presentation at the SPE Asia Pacific Conference. Yokohama, Japan, 25–26 April 2000. 10 p.
15. *Ouyang L.-B., Aziz K.* A General Single-Phase Wellbore/Reservoir Coupling Model for Multilateral Wells // SPERE&E. 2001. Vol. 4. P. 327–335.
16. *Besson J.* Performance of Slanted and Horizontal Wells on an Anisotropic Medium // Paper SPE 20965 prepared for presentation at the European Petroleum Conference. The Hague, Netherlands, 22–24 October 1990. 14 p.
17. *Maizeret P.D.* Well Indices for Nonconventional Wells // Master's report. Stanford University, 1996.