

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОКОЛОСКВАЖИННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗА СЧЕТ ЛОКАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ СЕТКИ

Э.С. Закиров, С.Н. Закиров, И.М. Индрупский, Д.П. Аникеев
ИПНГ РАН, e-mail: ezakirov@ogri.ru

В предыдущих публикациях авторов «О представлении скважины в 3D гидродинамической модели», «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения. Метод Писмена», «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения наклонной или горизонтальной скважины», «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения на сетке Вороного» и «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения – полуаналитический метод Стенфордского университета» в данном выпуске рассматривались вопросы моделирования скважины в условиях готовых сеточных областей. Между тем современные пакеты прикладных задач представляют всевозможные опции по локальному измельчению сетки в областях максимальных градиентов – на фронтах вытеснения и в околоскважинных областях. Измельчения могут быть динамическими в задачах продвижения фронтов вытеснения и статическими – в окрестностях скважин. Рассмотрим практически важную задачу локального измельчения сетки в околоскважинной области для улучшенного представления интеллектуальной скважины.

Анализ погрешности аппроксимации уравнений фильтрации в околоскважинной области

Многими исследователями давно отмечается необходимость точного моделирования давления и насыщенности в областях их максимально быстрого изменения. Но, пожалуй, впервые наиболее четко эта задача была сформулирована в диссертации [1].

В статье [2] осуществляется анализ погрешности аппроксимации потоков для сеточных блоков около скважины. Поскольку этот важный вопрос, как правило, не затрагивается при рассмотрении погрешности аппроксимации фильтрационных уравнений, остановимся на нем подробнее.

Принимаем, что сингулярность скважины заставляет давление изменяться по логарифмическому закону в окрестности скважины. Тогда n -ая производная давления в направлении скважины пропорциональна $1/r^n$, где r – расстояние от скважины. Таким образом, производная давления не может рассматриваться как ограниченная функция,

если r – малая величина. Это наблюдение должно учитываться при анализе погрешности аппроксимации.

Сформулируем двумерную математическую модель стационарного течения. Она описывается уравнением эллиптического типа. Скважина представлена источником/стоком следующим образом (рис. 1):

$$-\left(\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = q\delta(M_w), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} p(x, y) = p_{R,-}(x, y) \in \Gamma_D \\ \frac{\partial p(x, y)}{\partial n} = q_{R,-}(x, y) \in \Gamma_N \end{cases}, \quad (2)$$

где p – давление, $\bar{k} = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}$ – тензор абсолютной проницаемости, μ – вязкость, M_w –

точка, в которой располагается центр скважины, Ω – пласт с границей $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Нижние индексы D и N соответствуют границам областей с заданными граничными условиями Дирихле и Неймана.

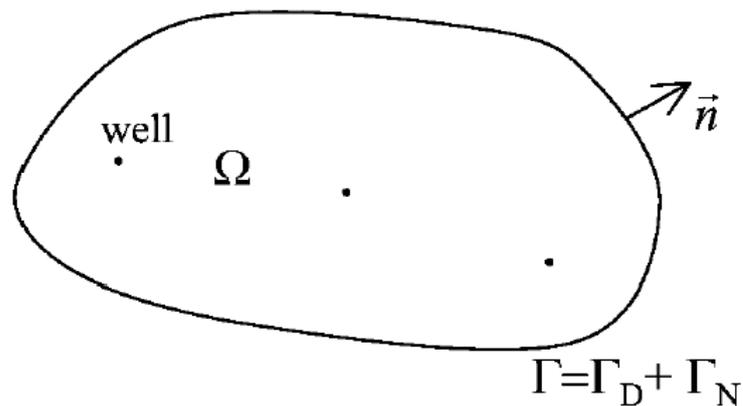


Рис. 1. Математическая постановка задачи по моделированию фильтрации

В условиях (2) может быть задано или забойное давление p_w , или дебит q . Если задано забойное давление p_w , то дебит q неизвестен. В противном случае при заданном q необходимо определить p_w .

Принципиально существует два типа математических моделей, работающих с сингулярностью в околоскважинной области:

- описание физических переменных на границе забоя скважины [3],
- использование членов источника/стока [4, 5].

В рамках первого подхода дискретизируется граница скважины. Во втором подходе скважина располагается внутри сеточного блока.

Численные схемы дискретизации границы забоя скважины обсуждаются, например, в публикации [6].

Модель источников/стоков широко использовалась в производственной сфере [4, 5], хотя данная модель и не описывает реальные физические процессы, происходящие около границы скважины. Часто считается достаточным точно описать течение в пласте, поскольку забой скважины намного меньше типичных размеров зоны пласта. Однако необходимо также знать давление, заданное или вычисляемое на границе скважины. Наиболее распространенный подход – задать численный коэффициент проводимости Писменовского типа [7, 8]. Анализ данного коэффициента произведен в публикациях* данного номера журнала.

Проанализируем возникающую погрешность аппроксимации при рассмотрении задачи с помощью указанного метода.

Вначале кратко рассмотрим стандартные численные методы моделирования околоскважинной области. Для простоты ограничимся картезианскими сеточными блоками и однородным пластом с $\mu = 1$ и $k = k_x = k_y$.

Дискретизация методом контрольного объема широко используется в литературе [9]. В результате его применения получают консервативную разностную схему с шаблоном, представленным на рис. 2:

$$\sum_{i=1}^4 F_i = q, \quad (3)$$

* См. статьи:

Закиров Э.С., Закиров С.Н., Индрупский И.М., Аникеев Д.П. «О представлении скважины в 3D гидродинамической модели»;

Закиров Э.С., Закиров С.Н., Индрупский И.М., Аникеев Д.П. «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения. Метод Писмена и близкие подходы»;

Закиров Э.С., Закиров С.Н., Индрупский И.М., Аникеев Д.П. «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения наклонной или горизонтальной скважины»;

Закиров Э.С., Закиров С.Н., Индрупский И.М., Аникеев Д.П. «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения на сетке Вороного»;

Закиров Э.С., Закиров С.Н., Индрупский И.М., Аникеев Д.П. «Вычисление коэффициента проводимости скважинного соединения – полуаналитический метод Стенфордского университета» в данном выпуске.

$$F_i = -T_i(p_i - p_0), i = 1, \dots, 4, \quad (4)$$

$$T_i = k \frac{\Delta y_0}{\Delta x_{0,i}}, i = 1, 3 \text{ и } T_j = k \frac{\Delta x_0}{\Delta y_{0,j}}, j = 2, 4.$$

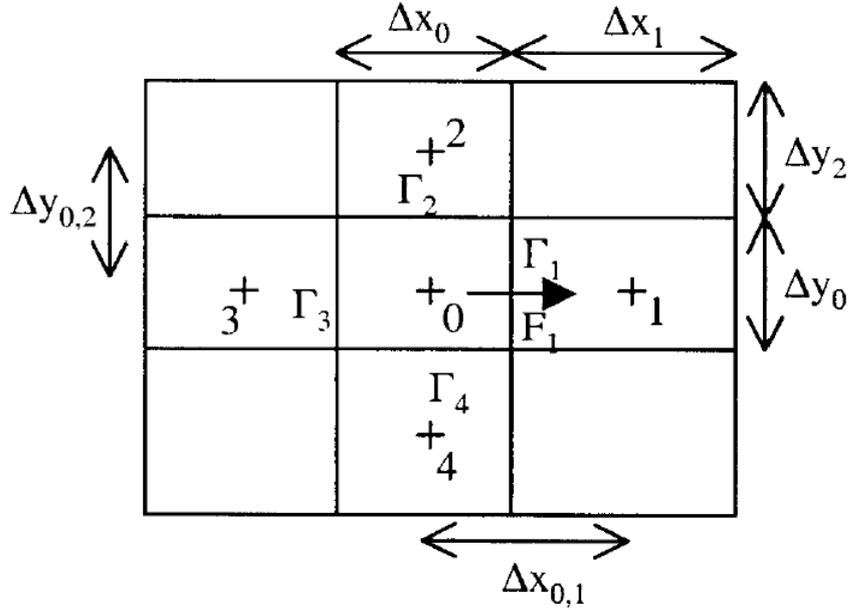


Рис. 2. Разностный шаблон для сеточного блока 0 с учетом его соседей

Все необходимые вспомогательные понятия представлены на рис. 2. Переходим непосредственно к анализу погрешности аппроксимации ε при вычислении потоков в околоскважинной области. Хорошо известно, что погрешность аппроксимации ε одного потока может быть представлена в виде:

$$\varepsilon = F_i - T_i(p_i - p_0) = C_0 O(h^2), \quad (5)$$

где h обозначает максимальный размер сеточного блока. Явно выделенная константа C_0 связана со второй частной производной: $C_0 = \sup_{(x,y) \in L_{0i}} \{Dp(x,y)\}$, где L_{0i} – линия, соединяющая точки i и 0 , а Dp обозначает норму производной второго порядка:

$$Dp(x,y) = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)^2}. \quad (6)$$

Примем также во внимание расстояние r между рассматриваемым сеточным блоком и скважиной. В уравнении (5) член $O(\cdot)$ не зависит от r . А вторая производная давления зависит от r , имея особенность типа $1/r^2$ в окрестности скважины. Когда h

стремится к нулю, для всех блоков $O(h)$ также стремится к нулю, независимо от расстояния между сеточным блоком и скважиной.

Если вторая производная ограничена, то погрешность вычисления потока равна $O(h^2)$. Но поскольку вторая производная в направлении скважины имеет порядок $1/r^2$, то соответствующий член становится неограниченным по мере стремления r к нулю. Что приводит к соответствующим ошибкам в стандартных численных схемах при околоскважинном моделировании.

Осуществляемое в работах [2, 6] разбиение задачи (1)–(2) притока к скважине на две вспомогательные задачи – сингулярного и регулярного течения – позволяет получить оценку погрешности аппроксимации с учетом расстояния r :

$$\varepsilon = O(h^2) + qO\left(\frac{h^2}{r^2}\right). \quad (7)$$

Для ячеек, не вскрытых скважиной, погрешность аппроксимации стремится к нулю. Для ячеек около скважины погрешность не стремится к нулю по мере стремления к нулю размера блока h . К сожалению, выясняется, что это неустранимая ошибка, имеющая серьезные последствия. Решение проблемы авторы работ [2, 6] видят в переходе к координатам полярного типа, в которых давление изменяется линейным образом в новых координатах. Затем в новой системе координат предлагаются процедуры для вычисления проводимостей при двухточечной и многоточечной аппроксимации потоков.

Важный практический вывод состоит в необходимости использования радиального локального измельчения околоскважинной области.

Локальное измельчение сетки около скважины как способ повышения точности расчетов

Список работ, посвященных различным аспектам использования локального измельчения околоскважинной области, весьма обширен. Он включает публикации [10–38].

Как известно, локальные измельчения бывают картезианскими [15, 16, 21, 31, 32, 37] и гибридными [30, 39]. В картезианских локальных измельчениях как измельченные, так и измельчаемые области имеют одинаковую систему координат. В гибридных локальных измельчениях измельченные области могут иметь радиальную (для изотропного пласта) или эллиптическую (для анизотропного пласта) сетку в пределах измельчаемой области. Поскольку течение около скважин почти радиально или

эллиптически, в большинстве случаев гибридное локальное измельчение должно дать результаты с повышенной точностью (по сравнению с картезианским измельчением с тем же числом ячеек в измельчении).

Пример картезианского измельчения представлен на рис. 3. Сопоставление в плане картезианского и гибридного измельчений дается на рис. 4. Гибридное измельчение часто предполагает использование полностью неявной схемы для локального измельчения и IMPES-процедуры для оставшейся области. При сравнении численного решения с аналитическим (из работы [40]) в однофазном случае наиболее точным признано локальное измельчение, представленное на рис. 5, а не на рис. 6, из-за проявления влияния границы на решение. Таким образом, увеличение числа радиальных сеточных ячеек, показанное на рис. 6, не улучшает совпадения с аналитическим решением, по сравнению со случаем рис. 5. При моделировании истощения на тех же сетках получены следующие результаты. Давления по обеим моделям близки, а обводнение по модели на рис. 5 происходит быстрее, чем по модели на рис. 6.

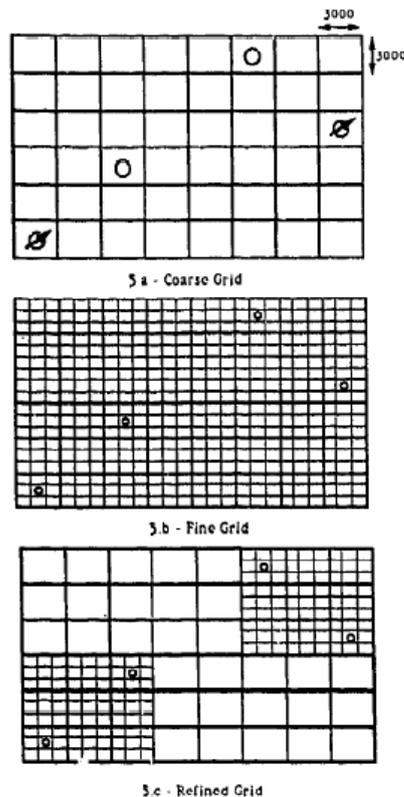
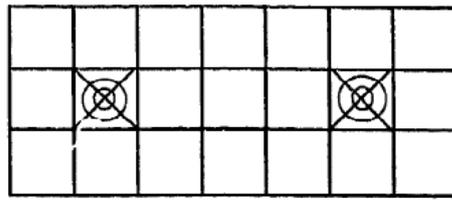
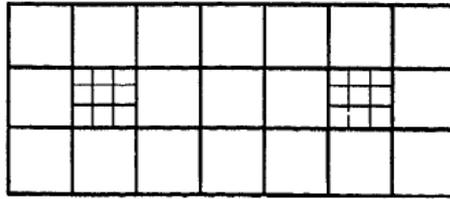


Рис. 3. Примеры локального измельчения на плоскости при наличии нескольких скважин



11.a - Hybrid LGR



11.b - Cartesian LGR

Рис. 4. Вид сверху на картезианское и гибридное локальные измельчения

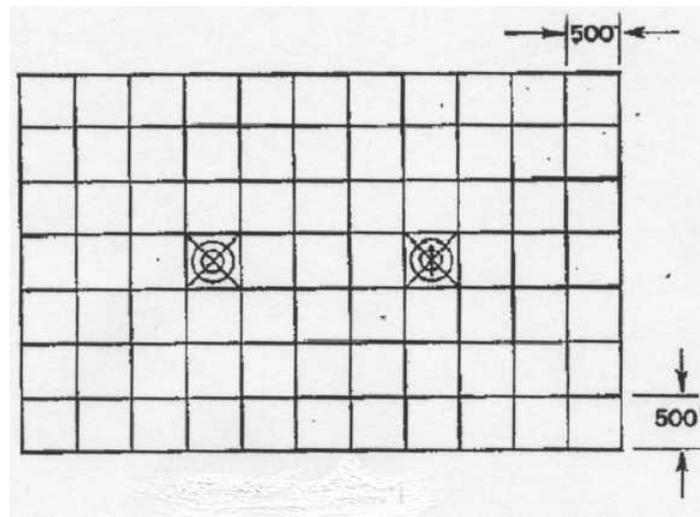


Рис. 5. Предпочтительное локальное измельчение околоскважинной области

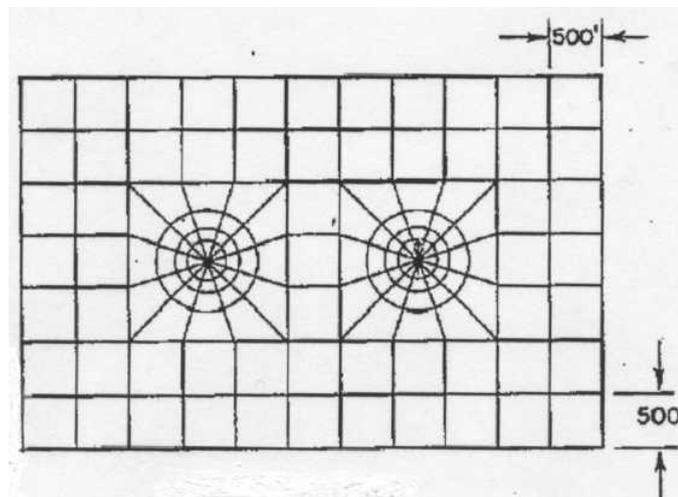


Рис. 6. Ухудшенное, по сравнению с представленным на рис. 5, локальное измельчение околоскважинной области

Хотя изначально локальное измельчение разрабатывалось для более точного учета изменения давления, достаточно неожиданным оказался факт наиболее сильного его влияния на распределение насыщенностей при многофазной фильтрации. Особенно заметно измельчение проявляет себя при моделировании процесса конусообразования.

Локальное измельчение может осуществляться на нескольких иерархических уровнях [14]: когда уже однократно измельченные ячейки подвергаются повторному измельчению и т.д.

Эффективность реализации локального измельчения часто связана с эффективностью решения системы линейных уравнений. В этом случае положительно проявляют себя методы декомпозиции областей [28, 29 и др.], позволяющие существенно параллелизовать соответствующие вычисления. В целом, повышению эффективности решения систем линейных и нелинейных уравнений при наличии локального измельчения посвящены многие работы [12, 13, 15, 17, 20, 25, 28, 29, 33 и др.].

Во многих работах, например в [11, 26, 34 и др.], также активно рассматривается возможность отдельного моделирования локального измельчения и основного гидродинамического расчета. В них на грубой гидродинамической модели с большими временными шагами определяются граничные условия для локальной области измельчения. А решение в последней получают при помощи гораздо меньших временных шагов, чем в гидродинамической модели. Этот подход носит название *dual time stepping* [1] – двойного временного шага.

Минимум, что может дать использование локального измельчения, – это снизить численную дисперсию.

Различают также статические и динамические локальные измельчения. Если расположение локального измельчения изменяется во времени, то такое измельчение называют динамическим. В противном случае это статическое измельчение. Большое количество работ, например [11, 14, 15, 20, 21, 25, 26 и др.], посвящено использованию различных динамических локальных измельчений, при которых сеточные блоки во времени подвергаются различной степени измельчения на основе научно обоснованных критериев (рис. 7), например, возможного превышения порогового значения на отдельном временном шаге изменения насыщенности. Как показывают результаты расчетов, приводимые на рис. 7, можно добиться высокой точности вычислений при значительно более грубой сетке (см. рис. 7, справа) с динамическим измельчением на фронте

вытеснения, по сравнению с достаточно мелкой сеткой (см. рис. 7, слева).

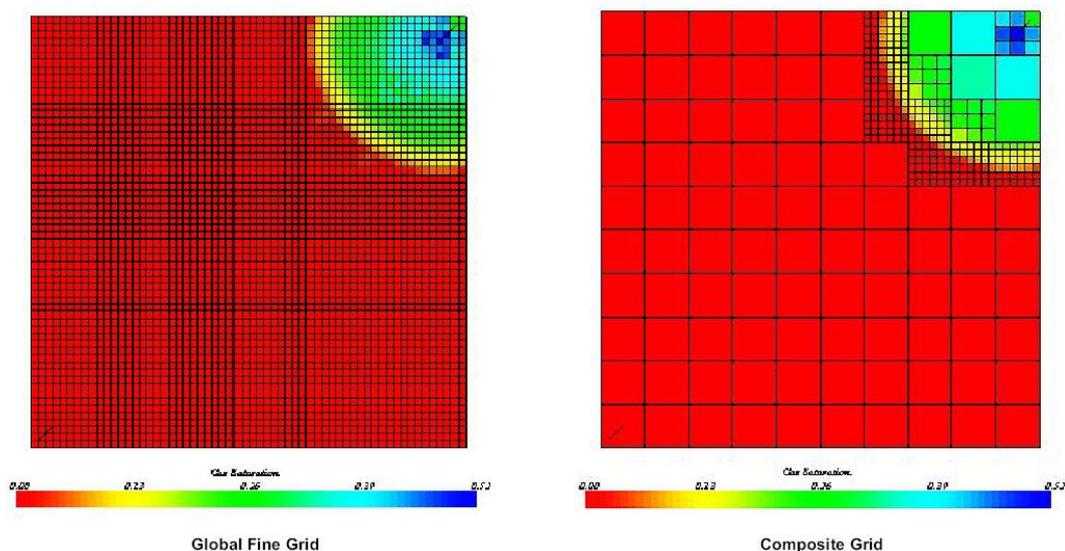


Рис. 7. Вид сверху на распределение газонасыщенности для двух вариантов сеточной дискретизации элемента разработки

При динамическом локальном измельчении актуальны критерии выбора ячеек как для их последующего измельчения, так и объединения, огрубления. В этом случае в различных зонах разрешающая способность сетки определяется автоматически и зависит от особенностей течения флюидов в них.

Хотя данный вопрос достаточно хорошо проработан на теоретическом уровне, его коммерческая реализация на рынке практически отсутствует (за исключением симуляторов компании CMG). Поэтому расчеты моделей интеллектуальных скважин могут реально производиться только с использованием статических локальных измельчений. При этом следует учесть, что статического локального измельчения может оказаться недостаточно [26] для достижения высокой степени достоверности прогнозных расчетов, например, при моделировании процессов конусообразования.

Наконец, следует отметить, что локальное измельчение сетки может потребоваться не только для повышения точности расчетов в околоскважинной области, но и для более точного представления траектории реальной скважины, пробуренной по технологии горизонтального бурения (рис. 8). Очевидная разница в членах гравитационного напора для моделей а) и б) указанного рисунка может сказаться на продуктивной характеристике отдельных частей скважины, включая наличие и отсутствие перетоков по стволу скважины.

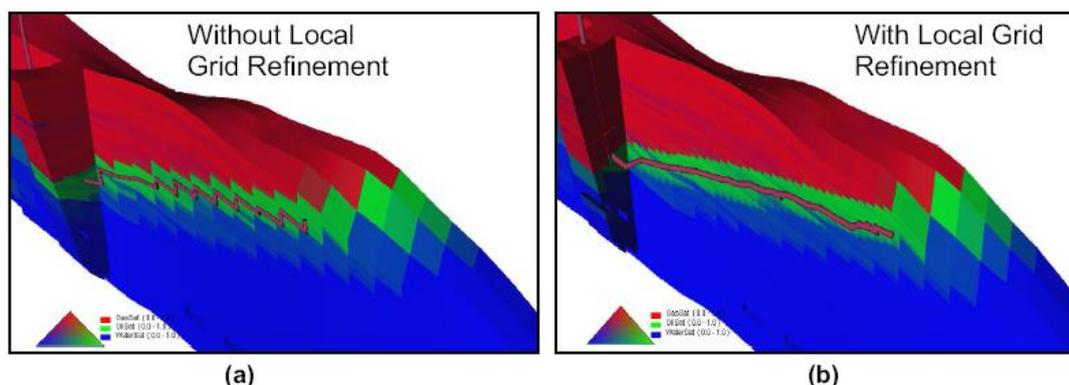


Рис. 8. Представление траектории скважины в модели: а) – без локального измельчения, б) – с локальным измельчением; расстояния вдоль оси z сильно увеличены [36]

Задаче точного сеточного представления горизонтальной скважины посвящено большое количество работ [18, 41–44 и др.]. Не касаясь различий в подходах, приведем наиболее предпочтительный результат построения локального измельчения вдоль траектории горизонтальной скважины. В перпендикулярном направлении к стволу скважины локальное измельчение не производится, поскольку в указанном направлении приток предполагается радиальным. Исключение составляют пятка и носок скважины. Эти две концевые зоны скважины испытывают сферический (эллиптический) приток флюидов. Поэтому для его представления необходимо локальное измельчение области, показанное на рис. 9, б. Речь идет о полусферической гибридной сетке (рис. 9, а и 9, с).

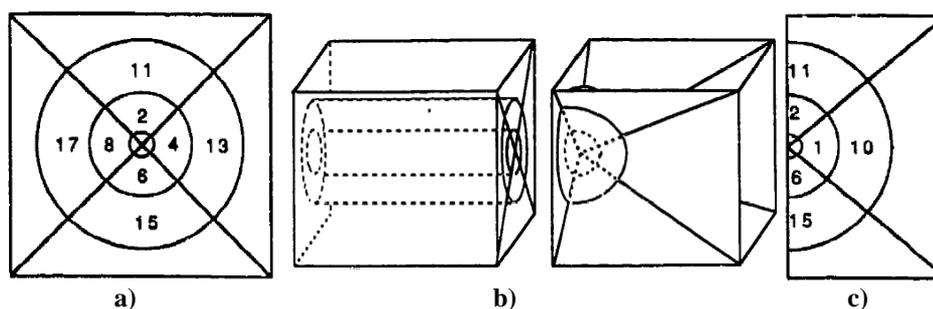


Рис. 9. Локальное измельчение с концов горизонтальной скважины
а) вид спереди на сферические гибридные сеточные блоки,
б) сеточная модель околоскважинной области,
с) горизонтальная проекция сферических гибридных сеточных блоков

Аналогичный вывод получен в [45]. Таким образом, измельчение вдоль горизонтальной скважины следует производить с ее концов – с пятки и носка скважины, поскольку полученные результаты демонстрируют близость к полному измельчению вдоль всей траектории скважины.

Задачу точного описания околоскважинного течения можно решать иначе, а именно использовать мелкую геологическую сетку, по определенным законам производя огрубление сеточных блоков, объединяя некоторое количество сеточных блоков в один большего размера. К сожалению, за исключением [46], в виде коммерческого продукта данный подход нигде не реализован.

Некоторые неожиданные результаты применения локального измельчения сетки

Однако, как справедливо отмечается в работе [47], некорректное применение неравномерной сетки с измельчением ячеек около скважин для решения некоторых типов фильтрационных задач может быть менее результативным, чем использование соответствующей более грубой равномерной сеточной области. Поэтому для каждой отдельно взятой фильтрационной задачи тип сеточной области и размер сеточных ячеек должны выбираться исходя из особенностей происходящих фильтрационных процессов.

Как следует из результатов исследований, описанных в работе [47], простое измельчение ячеек сетки в околоскважинных областях без учета данных особенностей еще не гарантирует увеличения точности решения задачи. В этой работе Е. Накулом и Х. Азизом проводилось двумерное двухфазное моделирование смешивающегося вытеснения в элементе разработки на равномерной сетке с размерностью 5×5 и неравномерной сетке с размерностью 9×9 (рис. 10, а, б). На рис. 10, в представлена и более мелкая равномерная сетка с размерностью 15×15 , решение на которой использовалось в качестве эталонного.

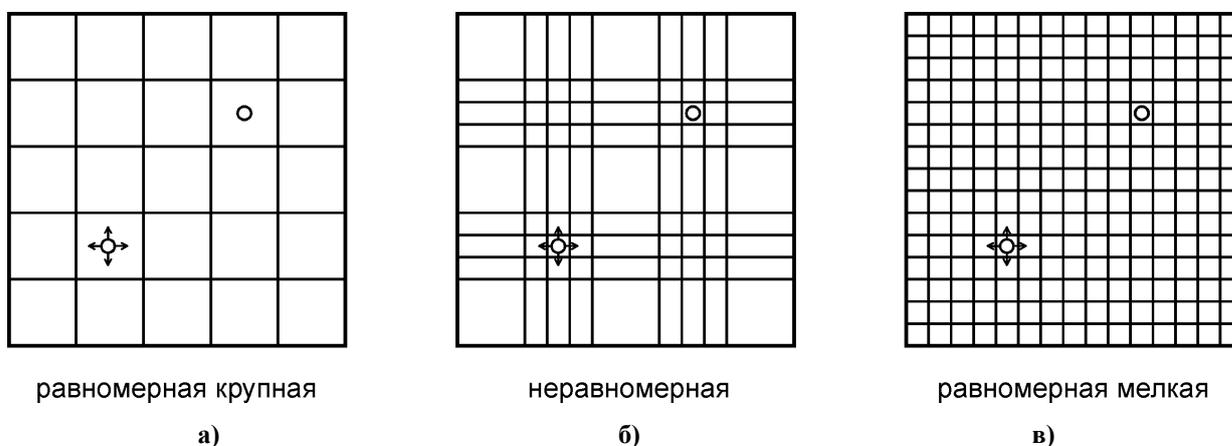


Рис. 10. Сеточные области, использованные при проведении исследований [47]

Как ни странно, результаты моделирования показали, что в рассматриваемом конкретном случае неравномерная сетка указанного вида дает менее точное решение, по сравнению с более грубой равномерной сеткой. В некотором смысле аналогичный результат, но в другом виде получен в работе [2].

Благодаря проведенной авторами настоящей статьи оценке погрешности аппроксимации становится понятна причина особенного поведения решения в околоскважинной области. Однако погрешность аппроксимации непосредственно не дает количественной оценки потребных шагов локального измельчения для целей повышения точности. Иными словами, она не предъявляет объективных требований к локальному измельчению. Поэтому необходимы специальные исследования, направленные на определение условий для локального измельчения сетки.

Интерес представляют иллюстрационные примеры работы [2]. Авторами рассматривалась обычная задача о притоке к скважине, а для сравнения использовалось аналитическое решение. Численные эксперименты показали, что при использовании стандартных подходов локальное измельчение сетки для моделирования скважины не улучшает результаты, а ухудшает их, кратно увеличивая погрешность определения забойного давления между численным и аналитическим подходами. Если же использовать новые методы аппроксимации работы [2], то ситуация не ухудшится в результате использования локального измельчения вокруг скважины.

Указанный рост ошибки при определении забойного давления связан с неточным определением пластового давления в околоскважинной области.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что малое (с небольшим количеством ячеек по координатным осям) локальное измельчение в окрестности скважины может не повышать точность вычислений, а снижать ее.

При применении локального измельчения рекомендуется пользоваться следующим неравенством для определения степени измельчения по осям:

$$\frac{\Delta x}{\Delta z} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \geq 1.$$

Работа [45] на основе численных экспериментов и их сравнения с аналитическим решением показала, что проводимость скважинной ячейки достаточно сильно чувствительна к неоднородности сеточной области около скважины. Ошибка при ее определении может быть значительно снижена путем использования однородной сетки

около горизонтальной скважины. При этом грубые однородные сетки могут давать более точные результаты, чем более измельченные однородные сетки.

Таким образом, можно сделать следующий вывод. В направлении радиального притока скважины необходимо использовать максимально однородную сетку. По крайней мере, 5–7 ячеек от ствола скважины должны быть однородными (различаться в размерах не более чем в 5 раз).

Выводы и рекомендации по использованию локального измельчения при проведении прогнозных расчетов

1. Локальное увеличение плотности сетки можно осуществить двумя способами. Первый способ – путем использования специальных ключевых слов непосредственно в гидродинамической модели. Второй способ – выполнить соответствующую работу по измельчению в рамках геологической модели, когда неравномерная сетка задается в плоскости x – y , имитируя функцию локального измельчения гидродинамической модели. Из-за особенностей реализации локального измельчения в симуляторах второй вариант наиболее предпочтителен с точки зрения скорости вычислений. Ибо расчеты проходят заметно быстрее при практически эквивалентной точности получаемых результатов по сравнению с однородной мелкой сеткой. Недостаток данного подхода – значительное усложнение переподготовки настроенной на полномасштабное моделирование геологической модели.

2. Предпочтительная схема локальных измельчений представлена на рис. 11. Здесь показано несколько различных типов гибридных и картезианских локальных сеток:

- 1) локальные сетки измельчения вокруг горизонтальных скважин, расположенных внутри сеточной области;
- 2) сетки около вертикальных скважин внутри области фильтрации;
- 3) сетки вокруг многозабойных скважин;
- 4) сетки вокруг горизонтальных скважин в непосредственной близости к границе сеточной области;
- 5) сетки для вертикальных скважин, локализованных в районе границ сеточной области.

Конфигурации указанных сеток направлены на максимально точное отслеживание продвижения фронтов флюидов в наиболее важных направлениях. При этом скорость (изменение давления) или вариации насыщенности максимальны.

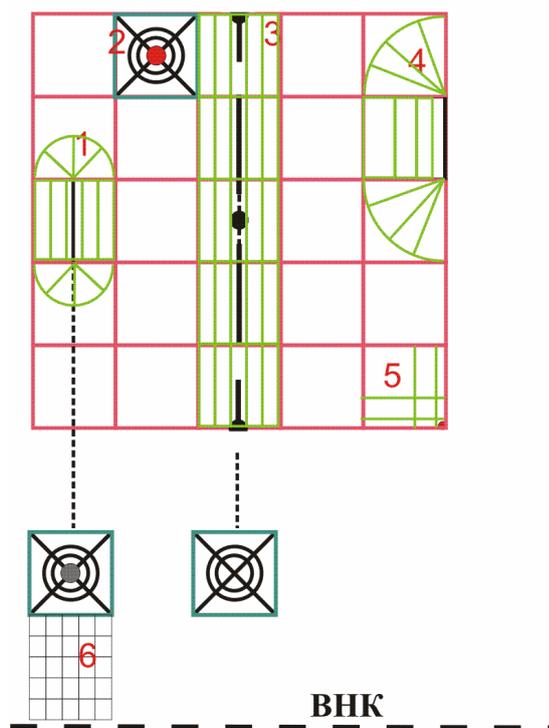


Рис. 11. Рекомендуемая схема локального измельчения околоскважинных областей

Для горизонтальных скважин примыкающие к стволу измельчаемые ячейки в измельчении должны иметь примерно одинаковые размеры, а измельчение должно производиться перпендикулярно к стволу скважины. Измельчение вдоль ствола не производится, исключение составляют ячейки пятки и носка скважины. Там производится соответствующее измельчение (см. рис. 10, в) для учета сферичности притока к скважине.

Цифрой шесть на рис. 11 обозначено локальное измельчение по вертикали непосредственно под вскрытыми скважиной сеточными ячейками.

3. Рекомендуется не использовать «малые» локальные измельчения. Это означает, что в измельчаемом направлении число мелких ячеек должно быть больше трех.

4. Локальное измельчение следует производить для всех ячеек, непосредственно вскрытых скважиной, а также для всех ячеек под ними. Необходимость подобного подхода базируется на результатах работы [37].

Статья написана в рамках выполнения государственного задания (тема «Научное обоснование новых экологически чистых технологий разработки месторождений углеводородов в сложных горно-геологических условиях на основе 3D-компьютерных экспериментов», № АААА-А16-116022510270-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Palagi C.L.* Generation and application of Voronoi grid to model flow in heterogeneous reservoir // Ph.D. Thesis. Stanford: Stanford University. May 1992.
2. *Ding Y., Jeannin L.* A multi-point flux approximation scheme for well modelling in reservoir simulations // Paper prepared for presentation at the 7th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Baveno, Italy, 5–8 September 2000.
3. *Chavent G., Jaffré J.* Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. Amsterdam: North-Holland, 1986. 375 p.
4. *Peaceman D.W.* Fundamentals of numerical reservoir simulation. Amsterdam: Elsevier, Developments in Petroleum Science. 1977. Vol. 6. 191 p.
5. *Азиз X., Семтару Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.
6. *Ding Y., Jeannin L.* New numerical schemes for the near-well modelling with discretization around the wellbore boundary using flexible grids // Paper SPE 66360 prepared for presentation at the 16th SPE Reservoir Simulation Symposium. Houston, Texas, USA, 11–14 February 2001. 16 p.
7. *Peaceman D.W.* Interpretation of well-block Pressures in Numerical Reservoir Simulation // SPEJ. 1978. June. P. 183–194.
8. *Peaceman D.W.* Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability // SPEJ. 1983. June. P. 531–543.
9. *Nghiem L.* An integral approach for discretizing the reservoir flow equations // SPERE. May 1988. P. 685–690. Paper SPE 12727.
10. *Al-Towailib H.S., Liu J.S.* The application of local grid refinement to simulate a large hydrocarbon reservoir as an alternative to a two-model approach // Paper SPE 21392 prepared for presentation at the SPE Middle East Oil Show. Bahrain, 16–19 November 1991. 14 p.
11. *Biterge M.B., Ertekin T.* Development and testing of a static/dynamic local grid-refinement technique // JPT. 1992. April. P. 487–495. Paper SPE 19803.
12. *Bowen G.R., Leiknes L.* Parallel processing applied to local grid refinement // Paper SPE 30203 prepared for presentation at the Petroleum Computer Conference, Houston, Texas, USA, 11–14 June 1995. 7 p.

13. *Chien M.C.H., Northrup E.J.* Vectorization and parallel processing of local grid refinement and adaptive implicit schemes in a general purpose reservoir simulator // Paper SPE 25258 prepared for presentation at the 12th SPE Symposium on Reservoir Simulation. New Orleans, Louisiana, USA, 28 February–3 March 1993. 12 p.
14. *Ding Y., Lemonnier P.A.* Development of dynamic local grid refinement in reservoir simulation // Paper SPE 25279 prepared for presentation at the 12th SPE Symposium on Reservoir Simulation, New Orleans, Louisiana, USA, 28 February–3 March 1993. 10 p.
15. *Ewing R.E., Lazarov R.D.* Adaptive local grid refinement // Paper SPE 17806 prepared for presentation at the SPE Rocky Mountain Regional Meeting. Casper, Wyoming, 11–13 May 1988. 9 p.
16. *Forsyth P.A., Sammon P.H.* Local mesh refinement and modelling of faults and pinchouts // Paper SPE 13524 prepared for presentation at the 8th SPE Symposium on Reservoir Simulation. Dallas, Texas, USA, 10–13 February 1985. 11 p.
17. *Fung L.S.K., Dogru A.H.* Distributed unstructured grid infrastructure for complex reservoir simulation // Paper SPE 113906 prepared for presentation at the SPE Europec/EAGE Annual Conference and Exhibition. Rome, Italy, 9–12 June 2008. 9 p.
18. *Goktas B., Ertekin T.* Implementation of a local grid refinement technique in modeling slanted, undulating horizontal and multi-lateral wells // Paper SPE 56624 prepared for presentation at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Houston, Texas, USA, 3–6 October 1999. 10 p.
19. *Gourley E.N., Ertekin T.* Application of a local grid refinement technique to model impermeable barriers in reservoir simulation // Paper SPE 39216 prepared for presentation at the SPE Eastern Regional Meeting. Lexington, Kentucky, 22–24 October 1997. 9 p.
20. *Han D.K., Han D.L., Yan C.Z., Peng L.T.* A more flexible approach of dynamic local grid refinement for reservoir modeling // Paper SPE 16014 prepared for presentation at the 9th SPE Symposium on Reservoir Simulation. San Antonio, Texas, USA, 1–4 February 1987. 10 p.
21. *Heinemann, Z.E., Gerken, G., von Hantelmann, G.* Using local grid refinement in a multiple-application reservoir simulator // Paper SPE 12255 prepared for presentation at the Reservoir Simulation Symposium, San Francisco, California, 15–18 November 1983. 14 p.

22. *Katzmayr M., Ganzer L.* An iterative algorithm for generating constrained Voronoi grids // Paper SPE 118942 prepared for presentation at the 2009 SPE Reservoir Simulation Symposium. The Woodlands, Texas, USA, 2–4 February 2009. 11 p.
23. *Killough J.E., Camilleri D., Darlow B.L., Foster J.A.* A parallel reservoir simulator based on local grid refinement // Paper SPE 37978 prepared for presentation at the SPE Reservoir Simulation Symposium. Dallas, Texas, USA, 8–11 June 1997. 15 p.
24. *Kurtoglu B., Medeiros F.Jr., Ozkan E., Kazemi H.* Semianalytical representation of wells and near-well flow convergence in numerical reservoir simulation // Paper SPE 116136 prepared for presentation for presentation at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Denver, Colorado, USA, 21–24 September 2008. 20 p.
25. *Liu W., Mezzatesta A.G., Hildebrand M.A.* Intergrid operations – dynamic gridding techniques in nonlinear domain decomposition methods // Paper SPE 79714 prepared for presentation at the SPE Reservoir Simulation Symposium. Houston, Texas, USA, 3–5 February 2003. 12 p.
26. *Manik J., Ertekin T.* Development and application of dynamic and static local grid refinement algorithms for water coning studies // Paper SPE 39228 prepared for presentation at the SPE Eastern Regional Meeting. Lexington, Kentucky, 22–24 October 1997. 8 p.
27. *Mohammed S.A.-A., Al-Ansari F.* Modelling of multiple horizontal wells in full field models using local grid refinements // Paper SPE 29813 prepared for presentation at the SPE Middle East Oil Show. Bahrain, 11–14 March 1995. 13 p.
28. *Nacul E.C., Lepretre C., Pedrosa O.A., Jr., Girard P., Aziz K.* Efficient use of domain decomposition and local grid refinement in reservoir simulation // Paper SPE 20740 prepared for presentation at the 65th Annual Technical Conference and Exhibition. New Orleans, Louisiana, 23–26 September 1990. 12 p.
29. *Nacul E.C.* Use of domain decomposition and local grid refinement in reservoir simulation // Ph.D. Thesis. Stanford: Stanford University. August 1990.
30. *Pedrosa O.A. Jr.* Use of hybrid grid in reservoir simulation: Ph.D. Thesis. Stanford: Stanford University. 1984.
31. *Quandalle P., Besset P.* Reduction of grid effects due to local sub-gridding in simulations using a composite grid // Paper SPE 13527 prepared for presentation at the SPE Reservoir Simulation Symposium. Dallas, Texas, USA, 10–13 February 1985. 11 p.

32. *Quandalle P., Besset P.* The use of flexible gridding for improved reservoir modeling // Paper SPE 12239 prepared for presentation at the 59th Annual Technical Conference and Exhibition. San Francisco, California, 5–8 October 1983. 10 p.
33. *Quandalle P., Moriano S.* Vectorization and parallel processing of models with local grid refinement // Paper SPE 21210 prepared for presentation at the 11th SPE Symposium on Reservoir Simulation. Anaheim, California, 17–20 February 1991. 7 p.
34. *Rodrigues J.R.P., Dickstein F.* A multigrid procedure for local grid refinement in oil reservoir simulation // SPE Advanced Technology Series. 1996. Vol. 4, No. 1. P. 157–164. Paper SPE 27049.
35. *Rosenberg D.U.* Local mesh refinement for finite difference methods // Paper SPE 10974 prepared for presentation at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition. New Orleans, Louisiana, 26–29 September 1982. 12 p.
36. *Wang Y., Shan D., Heim R.N.* Using a discretized well model to simulate production behavior in horizontal or multi-lateral wells // Paper SPE 112923 prepared for presentation at the SPE/DOE Improved Oil Recovery Symposium. Tulsa, Oklahoma, USA, 19–23 April 2008. 10 p.
37. *Washerman M.L.* Local grid refinement for three-dimensional simulators // Paper SPE 16013 prepared for presentation at the 9th SPE Symposium on Reservoir Simulation. San Antonio, Texas, February 1–4, 1987. 11 p.
38. *Risso V.F., Schiozer D.J., Wendland E.* Comparison between local refinement and open boundary techniques for simulation of large oil fields // Paper SPE 81165 prepared for presentation at the SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference. Port-of-Spain, Trinidad, West Indies, 27–30 April 2003. 8 p.
39. *Pedrosa. O.A. Jr., Aziz K.* Use of a hybrid grid in reservoir simulation // SPERE. 1986. Vol. 1, № 6. P. 611–621.
40. *Ramey H.J., Jr., Kumar A., Gulati M.S.* Gas well test analysis under water-drive conditions. Arlington, VA: American Gas Association, 1973.
41. *Economides M.J., Deimbacher F.X., Brand C.W., Heinemann Z.E.* Comprehensive simulation of horizontal-well performance // SPEFE. 1991. December. P. 418–426. Paper SPE 20717.
42. *Norris S.O., Piper L.D.* Modeling fluid flow around horizontal wellbores // Paper SPE 20719 presented at the 65th Annual Technical Conference and Exhibition. New Orleans, Louisiana, 23–26 September 1990. 11 p.

43. *Palagi C.L., Aziz K.* Modeling vertical and horizontal wells with Voronoi grid // SPERE. 1994. February. Vol. 9, No. 1. 7 p.
44. *Palagi C.L., Aziz K.* The modeling of vertical and horizontal wells with Voronoi grid // Paper SPE 24072 prepared for presentation at the SPE Western Regional Meeting. Bakersfield, CA, 30 March–1 April 1992. 7 p.
45. *Morita N., Singh S.P., Chen H.S., Whitfill D.L.* Three-dimensional well model pre-processors for reservoir simulation with horizontal and curved inclined wells // Paper SPE 20718 prepared for presentation at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition. New Orleans, Louisiana, 23–26 September 1990. 16 p.
46. *Fitzpatrick A.J., Ponting D.K.* Modeling complex wells in detailed geologies // Paper SPE 66370 prepared for presentation at the SPE Reservoir Simulation Symposium. Houston, Texas, USA, 11–14 February 2001. 11 p.
47. *Nacul E.C., Aziz K.* Use of irregular grid in reservoir simulation // Paper SPE 22886 prepared for presentation at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Dallas, Texas, USA, 6–9 October 1991. 14 p.