# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ МЕЖФАЗНЫХ ГРАНИЦ

В.М. Максимов
Институт проблем нефти и газа РАН
e-mail: vmaks@ipng.ru

## Введение

При исследовании гетерогенных (многофазных) систем необходимо учитывать, что деформация каждой фазы, определяющая ее состояние и реакцию, связана не только со смещением внешних границ выделенного объема (как в случае гомогенной смеси), но и со смещением межфазных поверхностей внутри выделенного объема смеси. Это требует дополнительного привлечения условий совместного деформирования и движения фаз, учитывающих смещение вещества $\alpha$-фазы на поверхности раздела фаз.

С механической точки зрения поверхность раздела можно рассматривать как аналог растянутой мембраны. Однако при описании свойств поверхностей раздела нужно учитывать прилегающие объемы фаз и баланс физических величин между этими объемами и поверхностью. Если система не находится в термодинамическом равновесии, то межфазная поверхность является «неавтономной фазой» в том смысле, что характеризующие ее термодинамические функции зависят не только от параметров поверхности, но также и от характеристик объемных фаз. При использовании термодинамического подхода гипотезу «неавтономности» можно заменить гипотезой локального равновесия на ее макроскопически малых участках.

Учет межфазных границ привносит в решение задач гидродинамики и неравновесной термодинамики значительные трудности, поскольку в математическом описании задач эти границы проявляют себя не просто как граничные условия. Учет ряда явлений, возникающих при взаимодействии процессов переноса, и явлений, связанных с изменением межфазного натяжения, приводит к тому, что сами граничные условия могут содержать новые феноменологические коэффициенты[1].

[1] В тексте используется тензорно-диадная символика. Символ тензора обозначается двумя верхними чертами $(\overline{\overline{\Pi}}, \overline{\overline{P}}, \overline{\overline{D}}$ и т.д.$)$. Единичный тензор $\overline{\overline{I}}$ имеет компоненты $\delta_{ik}$, где $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$; $\nabla a$ – скалярный градиент, $\nabla\vec{v}$ – векторный градиент; $\nabla\cdot\vec{v}$ и $\nabla\cdot\overline{\overline{\Pi}}$ – соответственно, векторная и тензорная дивергенция и т.д.

Отметим, что известные нам работы [1, 2], а также работы зарубежных авторов (D. Bedeaux, A. Albano, P. Mazur; R. Gefay, I. Prigogine, A. Sanfeld и др.) связаны с исследованием поверхностных явлений и динамики границы раздела двух фаз, движущихся в открытом пространстве. Учет динамики межфазных границ и капиллярного давления при фильтрации флюидов в пористой среде представляет более сложную задачу. Здесь мы рассмотрим макроскопический подход с использованием формализма термодинамики необратимых процессов.

**1. Основные допущения и гидродинамические уравнения баланса**

Термодинамический подход основан на систематическом применении основных принципов термодинамики неравновесных процессов [3, 4]. Будем считать, что твердый скелет породы – недеформируемый и не реагирующий с жидкими фазами (предполагаем их несжимаемыми) – полностью смачивается жидкостью 1 (водой) и не взаимодействует с жидкостью 2 (нефтью). Пренебрегаем также адсорбцией на межфазных границах. Таким образом, рассматриваемая система состоит из пяти «фаз»: двух жидких фаз, твердой фазы (скелета породы), границы раздела между флюидами и границы контакта жидкости 1 с твердым скелетом. Для каждой фазы сформулируем уравнение баланса массы, импульса (обобщенные законы фильтрации) и обобщенной функции состояния $\hat{F}_\alpha$, заменяющей энтропию. Ввиду изотермичности процесса, в качестве таковой удобно ввести сумму свободной энергии Гельмгольца $F_\alpha$ и кинетической энергии, так что

$$\hat{F}_\alpha = F_\alpha + \frac{1}{2}v_\alpha^2 = \varepsilon_\alpha - \bar{T}\hat{s}_\alpha + \frac{1}{2}v_\alpha^2, \quad (\alpha = 1, 2), \tag{1}$$

где $\varepsilon_\alpha$ и $\hat{s}_\alpha$ – соответственно, внутренняя энергия и энтропия единицы массы $\alpha$-фазы; $T = T_1 = T_2$ – температура фаз.

Для жидких фаз имеем уравнение неразрывности и уравнение баланса импульса (без учета силы тяжести) [3]:

$$\partial_t(m\rho_\alpha^0 s_\alpha) + \nabla\cdot(m\rho_\alpha^0 s_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0 \tag{2}$$

$$(\alpha = 1, 2),$$

$$\rho_\alpha \frac{d^\alpha \vec{v}_\alpha}{dt} + \nabla\cdot\left(m s_\alpha p_\alpha \bar{I} - \bar{\bar{\Pi}}_\alpha\right) = \vec{R}_\alpha, \tag{3}$$

$$\left(\frac{d^\alpha}{dt} = \partial_t + \vec{v}_\alpha\cdot\nabla\right).$$

Здесь $\rho_\alpha$ и $\rho_\alpha^0$ – соответственно, средняя и истинная плотности, $p_\alpha$ и $\bar{\bar{\Pi}}_\alpha$ – давление и тензор вязких напряжений $\alpha$-фазы; $s_\alpha$ – насыщенность $\alpha$-фазы, $s_1 + s_2 = 1$.

Правая часть $\vec{R}_\alpha$ уравнения (3) представляет межфазовый обмен импульсом за счет вязкости, который сводится к эффективной объемной силе, пропорциональной относительной скорости движения фаз и имеющей вид:

$$\vec{R}_\alpha = \sum_{\beta=0}^{2} r_{\alpha\beta} \left(\vec{v}_\beta - \vec{v}_\alpha\right),$$

$r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha} \; (\alpha \neq \beta)$ вследствие принципа Онзагера формализма неравновесной термодинамики ($\beta = 0$ относится к твердому скелету породы).

Из (3) находим уравнение баланса кинетической энергии $\alpha$-фазы

$$\rho_\alpha \frac{d^\alpha}{dt}\left(\frac{v_\alpha^2}{2}\right) = \vec{v}_\alpha \cdot \left(\nabla \cdot \bar{\bar{\Pi}}_\alpha\right) - \vec{v}_\alpha \cdot \nabla(m s_\alpha p_\alpha) + \vec{v}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha. \quad (4)$$

При формулировке уравнений баланса на межфазных границах будем исходить из соответствующих уравнений на микроуровне (например, в масштабе поры). Переход к макроскопическим переменным выполнялся путем использования метода локального усреднения по объему и по площади [5].

Соотношения, выражающие баланс импульса на межфазной границе на микроуровне, имеют вид [6]:

$$\vec{n} \cdot \bar{\bar{P}}^a = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{P}}^a + \vec{n} \cdot \left(\bar{\bar{P}}_1^a - \bar{\bar{P}}_2^a\right) = 0. \quad (6)$$

Равенство (5) отражает факт отсутствия переноса импульса в направлении нормали к поверхности, тогда как (6) устанавливает разрыв тензора давлений жидких фаз при переходе через граничную поверхность. Вводя поверхностное натяжение σ на границах нефть – вода, можно представить тензор давлений на межфазной поверхности в виде:

$$\bar{\bar{P}}^a = \left(\vec{n}_\alpha \vec{n}_\alpha - \bar{\bar{I}}\right)\sigma. \quad (7)$$

Определим тензор деформации $\bar{\bar{D}}^*$ границы раздела между жидкими фазами на микроуровне как отклонение ее от равновесной сферической формы:

$$\bar{\bar{D}}^* = \vec{n}_\alpha \vec{n}_\alpha - \frac{1}{3}\bar{\bar{I}}.$$

Тогда (6) с учетом (7) принимает вид:

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{D}}^*\right)\sigma\right] = \sum_{\alpha=1}^{2} \vec{n}_\alpha \cdot \bar{\bar{P}}_\alpha^a. \quad (8)$$

Результирующий макроскопический аналог уравнения баланса импульса на межфазной границе получается из (8) с помощью операции локального усреднения по площади и имеет вид:

$$\frac{2}{3}\nabla(\sigma A) - \nabla\cdot\left(\sigma A \overline{\overline{D}}^{a}\right) = \vec{f}^{a}, \qquad (9)$$

где $\overline{\overline{D}}^{a}$ – усредненный тензор деформации границы раздела, $\vec{f}^{a}$ – макроскопическая сила межфазного взаимодействия, $A$ –площадь поверхности раздела между жидкими фазами.

## 2. Уравнение баланса обобщенной свободной энергии Гельмгольца и локальное «производство» диссипативной функции

Уравнение Гиббса относительно свободной энергии Гельмгольца $F_\alpha$ жидкой $\alpha$-фазы для величин, отнесенных к единице массы, в нашем случае имеет вид [4, 6]:

$$\rho_\alpha \frac{d^\alpha F_\alpha}{dt} = -\rho_\alpha \frac{d^\alpha}{dt}\left(\frac{p_\alpha}{\rho_\alpha^a}\right) + \frac{d^\alpha}{dt}(ms_\alpha p_\alpha), \qquad (\alpha = 1, 2). \qquad (10)$$

После использования уравнения неразрывности (2) с учетом несжимаемости фаз $\nabla\cdot\vec{v}_\alpha = 0$ и соответствующих преобразований, из (10) находим

$$\rho_\alpha \frac{d^\alpha F_\alpha}{dt} + \nabla\cdot(ms_\alpha p_\alpha \vec{v}_\alpha) = -p_\alpha \frac{\partial(ms_\alpha)}{\partial t} + ms_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \nabla p_\alpha.$$

Складывая последнее соотношение и (4), получаем окончательно уравнение баланса «обобщенной» свободной энергии (1) для жидких фаз:

$$\rho_\alpha \frac{d^\alpha \hat{F}^\alpha}{dt} + \nabla\cdot\left(ms_\alpha p_\alpha \vec{v}_\alpha - \vec{v}_\alpha\cdot\overline{\overline{\Pi}}_\alpha\right) =$$

$$= -p_\alpha \frac{d(ms_\alpha)}{dt} - \overline{\overline{\Pi}}_\alpha : \nabla\vec{v}_\alpha - p_\alpha v_\alpha\cdot\nabla(ms_\alpha) + \vec{v}_\alpha\cdot\vec{R}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2). \qquad (11)$$

Постулируя уравнение Гиббса на межфазной границе, аналогично получаем уравнение баланса поверхностной свободной энергии $F^a = \hat{F}^a$, которое имеет вид:

$$\frac{d^a}{dt}(AF^a) = \sigma\frac{d^a A}{dt} \qquad (12)$$

$$\left(\frac{d^a}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}^{a}\cdot\nabla\right).$$

Здесь и всюду верхний индекс «*a*» указывает на принадлежность к межфазной поверхности. Раскрывая оператор $\frac{d^a}{dt}$ с учетом условия $F^a = \sigma$ и затем, складывая результат преобразования (12) с уравнением (9), скалярно умноженным на $\vec{v}^a$, окончательно находим

$$\frac{\partial(A\hat{F}^a)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(A\hat{F}^a\vec{v}^a - A\sigma\overline{\overline{D}}^a\cdot\vec{v}^a\right) =$$

$$= \sigma\frac{\partial A}{Dt} + A\sigma\nabla\cdot\vec{v}^{a} - A\sigma\overline{\overline{D}}^{a} : \nabla\vec{v}^{a} + \vec{v}^{a}\cdot\left[\hat{F}^{a} + \frac{1}{3}(\sigma A)\right]. \quad (13)$$

Поскольку ни граница «скелет породы – флюид», ни твердая фаза, не дают вклад в диссипативную функцию, то, суммируя два уравнения (11) и (13), получим уравнение баланса свободной энергии всей системы $\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2 + \hat{F}^{a}$, а правая часть результирующего соотношения дает выражение для локального производства $\Sigma$ функции $\hat{F}$ (аналог производства энтропии). Учитывая соотношение между насыщенностями жидких фаз $s_1 = 1 - s, s = s_2$ и вводя капиллярное давление $p_c = p_2 - p_1$, находим:

$$\Sigma = -p_c\frac{\partial(ms)}{\partial t} + \sigma A\nabla\cdot\vec{v}^{a} + \sigma\frac{\partial A}{\partial t} - \overline{\overline{\Pi}}_1 : \nabla\vec{v}_1 - \overline{\overline{\Pi}}_2 : \nabla\vec{v}_2 - \sigma A D^{a} : \nabla\vec{v}^{a} + \vec{v}_1\cdot\left(\vec{R}_{1s} + \vec{R}_{13} + \right.$$
$$\left. + p_1\nabla(ms)\right) + \vec{v}_2\cdot\left(\vec{R}_{21} - p_2\nabla(ms)\right) + \vec{v}^{a}\cdot\left[f^{a} + \frac{1}{3}\nabla(\sigma A)\right]. \quad (14)$$

### 3. Линейные кинетические уравнения. Обобщенные законы фильтрации

Постулируем, что в первом приближении динамика межфазной границы $\partial_t A$ линейно связана с локальным распределением объемных фаз $\partial_t(ms)$ и пропорциональна полной кривизне *K* межфазной поверхности, так что

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mathrm{K}\Phi\left(m, s, \overline{\overline{D}}^{a}, \vec{x}, t, \chi\right)\frac{\partial(ms)}{\partial t}, \quad (15)$$

где скалярная функция Ф характеризует внутреннюю структуру пористой среды и может зависеть от ее пористости, насыщенности, инвариантов тензора деформации, пространственных координат, времени и, возможно, других структурных параметров $\chi$. Использование теории размерности позволило бы сделать некоторые выводы о структуре этой функции. Здесь ограничимся сильными допущениями для получения качественных результатов.

Если межфазная поверхность в процессе вытеснения сохраняет форму, близкую к сферической $\left(\overline{\overline{D}}^{a} \cong 0\right)$, то равенству (15) можно придать наиболее простой вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 2\mathrm{K}\frac{\partial(ms)}{\partial t}.$$

Подстановка (15) в соотношение (14) дает следующее выражение для диссипативной функции:

$$\Sigma = (\sigma\mathrm{K}\Phi - p_1)\frac{\partial}{\partial t}(ms) + \sigma A\nabla\cdot\vec{v}^{a} + \vec{v}_1\cdot\left[\vec{R}_{12} + \vec{R}_{1s} + p_1\nabla(ms)\right] + \vec{v}_2\cdot\left[\vec{R}_{21} - p_2\nabla(ms)\right] +$$
$$+ \vec{v}^{a}\cdot\left[\vec{f}^{a} + \frac{1}{3}\nabla(\sigma A)\right] - \overline{\overline{\Pi}}_1 : \nabla\vec{v}_1 - \overline{\overline{\Pi}}_2 : \nabla\vec{v}_2 - \sigma A\overline{\overline{D}}^{a} : \nabla\vec{v}^{a} \quad (16)$$

С помощью (16), используя формализм неравновесной термодинамики [6, 7], устанавливаются кинетические уравнения между независимыми потоками и термодинамическими силами. Если пренебречь перекрестными эффектами, кроме вязкостного взаимодействия потоков жидких фаз, то тогда из (16) вытекают следующие кинетические уравнения:

$$p_c - \sigma К\Phi = L_1 \frac{\partial(ms)}{\partial t}, \tag{17}$$

$$\sigma A = L_2 \nabla \cdot \vec{v}^a, \tag{18}$$

$$\vec{R}_{12} + \vec{R}_{1s} + p_1 \nabla(ms) = L_{11}\vec{v}_1 + L_{12}\vec{v}_2, \tag{19}$$

$$\vec{R}_{21} - p_2 \nabla(ms) = L_{21}\vec{v}_1 + L_{22}\vec{v}_2, \quad (L_{12} = L_{21}),$$

$$\vec{v}^a = L_3 \left[ \vec{f}^a + \frac{1}{3} \nabla(\sigma A) \right], \tag{20}$$

$$\overline{\overline{\Pi}}_\alpha = L^\alpha \nabla \vec{v}_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2), \tag{21}$$

$$\sigma A \overline{\overline{D}}^a = L_4 \nabla \vec{v}_\alpha. \tag{22}$$

Первые два из них соответствуют скалярным процессам. Уравнение (17) описывает изменение капиллярного давления в результате перераспределения объемных фаз в процессе вытеснения. Уравнение (18) связано со скоростью изменения «поверхностного» удельного объема $div\ \vec{v}^a$, вызывающего изменение площади межфазной границы (это напоминает вклад второй вязкости в гидродинамике ньютоновских жидкостей).

Замыкающие тензорные соотношения (21)-(22) устанавливают связь компонент тензоров вязких напряжений жидких фаз $\overline{\overline{\Pi}}_\alpha$ и тензора деформации $\overline{\overline{D}}^a$ межфазной границы, соответственно, с компонентами симметричных тензоров $\nabla\vec{v}_\alpha$ и $\nabla\vec{v}^a$.

Из предыдущих рассмотрений вытекают обобщенные законы фильтрации для жидких фаз и межфазной границы. Выводя из (19) силы межфазного взаимодействия $\vec{R}_1 = \vec{R}_{12} + \vec{R}_{1s}$ и $\vec{R}_2 = \vec{R}_{21} = -\vec{R}_{12}$ и подставляя их в уравнение баланса импульса фаз (3), после преобразований находим:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \acute{L}_{11}\vec{A}_1 - \acute{L}_{12}\vec{A}_2, \\ \vec{v}_2 &= -\acute{L}_{12}\vec{A}_1 - \acute{L}_{22}\vec{A}_2. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $A_\alpha = \rho_\alpha \frac{d^\alpha \vec{v}_\alpha}{dt} - \nabla \cdot \Pi_\alpha + ms_\alpha \nabla p_\alpha$, $(\alpha = 1, 2)$; $\acute{L}_{\alpha\beta}$ – коэффициенты, которые выражаются через $L_{\alpha\beta}$.

Соотношения (23) обобщают закон фильтрации двух жидкостей в пористой среде, учитывая вязкостное взаимодействие флюидов, инерционные эффекты и тензор вязких напряжений фаз. Если не учитывать перекрестные члены в (19), то из (23) вытекает обобщенный закон Дарси для каждой фазы, включающий инерционно-вязкостные эффекты:

$$\vec{w}_\alpha = -\mathrm{K}_\alpha \left( \nabla p_\alpha + \rho_\alpha^0 \frac{d^\alpha \vec{v}_\alpha}{dt} - \frac{\nabla \cdot \bar{\bar{\Pi}}_\alpha}{m s_\alpha} \right), \qquad (24)$$

где $\mathbf{K}_\alpha = \hat{L}_{\alpha\alpha}(m s_\alpha)^2, \vec{w}_\alpha = m s_\alpha \vec{v}_\alpha, (\alpha = 1,2)$.

При пренебрежении инерционным и вязкостным вкладом из (24) получается двухчленный закон двухфазной фильтрации:

$$\vec{w}_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{2} \lambda_{\alpha\beta} \nabla p_\beta, \quad (\alpha = 1,2) \quad , \qquad (25)$$

где $\lambda_{\alpha\beta}$ – подвижности фаз.

Аналогичное уравнение, описывающее взаимодействие на межфазной границе, выводится из (20) и (9) и имеет вид:

$$\vec{v}^a = L_3\left[\nabla(\sigma A) - \nabla \cdot \left(\sigma A \bar{\bar{D}}^\alpha\right)\right]. \qquad (26)$$

Это уравнение можно трактовать как аналог закона Дарси для движущейся усредненной межфазной границы в пористой среде.

**4. Выводы и заключение**

В рассмотренной модели неизвестными величинами являются пять скалярных параметров (давления в фазах $p_\alpha$, насыщенность $s$ одной из фаз, площадь межфазной поверхности $A$, полная кривизна $K$ межфазной границы); векторные характеристики $\vec{v}^a, \vec{v}_\alpha, \vec{R}_{12}, \vec{R}_{13}$ и $f^\alpha$; тензорные величины $\bar{\bar{\Pi}}_\alpha$ и $\bar{\bar{D}}^\alpha$.

Для их определения получена замкнутая система уравнений, состоящая из:

1) пяти скалярных уравнений – двух уравнений неразрывности (2), двух кинетических уравнений (17), (18) и соотношения (15);

2) шести векторных уравнений и трех уравнений баланса импульса (23), (24) и трех феноменологических уравнений (19), (20); трех тензорных соотношений, образованных кинетическими уравнениями (21), (22).

В соотношения (17)–(22) входят девять феноменологических коэффициентов $L_k$, включая три коэффициента $L_{\alpha\beta}$ в равенствах (19). Проблема оценки их вклада в фильтрационные показатели и определения их значений находится за пределами макроскопического описания. Для коэффициентов $L_{\alpha\beta}$, которые могут быть выражены через $\lambda_{\alpha\beta}$ в обобщенном двухчленном законе Дарси (25), имеются некоторые экспериментальные данные и оценки [7]. Другие коэффициенты могут быть определены в результате физического или численного моделирования двухфазных течений на капиллярных или сеточных моделях.

***Основные полученные результаты состоят в следующем.***

Дано доказательство обобщенного закона фильтрации (23), учитывающего вязкостное взаимодействие между фазами и с твердым скелетом породы, инерционные и вязкостные эффекты. В качестве следствия получены частные выражения обобщенного закона Дарси (24) для каждой фазы и двухчленного закона фильтрации (25).

В отличие от обычно используемого соотношения Леверетта для капиллярного давления $p_c$, получаемого для стационарных равновесных условий, выведено дифференциальное уравнение (17), описывающее изменение $p_c$ в результате нестационарного перераспределения объемных фаз и деформации межфазной границы в процессе вытеснения. Такая термодинамическая трактовка учета эффектов неравновесности дополняет известные подходы к данной проблеме [8–11].

Показано, что скорость перемещения межфазной поверхности в пористой среде подчиняется соотношению (26), аналогичному по структуре закону Дарси.

В низкопроницаемых коллекторах на больших глубинах динамика межфазных границ и процессы капиллярной пропитки и сорбции могут иметь первостепенное значение.

*Статья написана в рамках выполнения Программы Президиума РАН № 47 «Углеводороды с глубоких горизонтов в «старых» нефтегазодобывающих регионах как новый источник энергоресурсов: теоретические и прикладные аспекты» (№ АААА-А18-118041090102-5).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.

2. *Auriault J.L., Sanchez-Palentia E.* Remarques sur la loi de Darcy pour les ecoulements biphasiques en mileu poreux // J. of Mecanique Theorique et Appliquee. 1986. Numero special. P. 141-156.

3. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 466 с.

4. *Колесниченко А.В., Максимов В.М.* Обобщенный закон фильтрации Дарси как следствие соотношений Стефана-Максвелла для гетерогенной среды. М.: Препринт Ин-та прикл. математ. им. М.В. Келдыша, 1999. № 45. 31 с.

5. *Слеттери Дж.С.* Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. М.: Энергия, 1978. 448 с.

6. *Пригожин И., Дефэй Р.* Химическая термодинамика. Новосибирск: Наука, 1966. 509 с.

7. *Максимов В.М.* Основы гидротермодинамики пластовых систем. М.: Недра, 1994. 201 с.

8. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 207 с.

9. *Мирзаджанзаде А.Х., Максудов Ф.Г., Нигматулин Р.И.* и др. Теория и практика применения неравновесных систем в нефтедобыче. Баку: Элм, 1985. 210 с.

10. *Nikolaevsky V.N.* Mechanics of Porous and Fractured Media. Singapore, New Jersey, Hong Kong: World Sci., 1990. 472 p.

11. *Whitaker S.* Flow on Porous Media II: The governing equations for immiscible two-phase flow // Transport in Porous Media. 1986. Vol. 1, No 2. P. 105–125.