МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕСТ АВАРИЙНЫХ УТЕЧЕК ГАЗА В ГАЗОВОЙ СКВАЖИНЕ

В.М. Максимов
ИПНГ РАН
e-mail: vmaks@ipng.ru

Введение

Проблема оперативного определения мест разгерметизации скважин (особенно на Арктическом шельфе) остается весьма актуальной, поскольку эффективность и стоимость проведения ремонтных работ во многом зависят от времени и точности определения места утечки газа. Поскольку одним из индикаторов утечек газа через поврежденную эксплуатационную колонну является внезапное уменьшение дебита скважины, необходимо знать результаты замеров ряда параметров до и после аварии.

1. Постановка задачи

В основу математической модели процесса положена система уравнений газовой динамики, осредненная по поперечному сечению трубы. Скважина может быть как вертикальной, так и наклонно-направленной. Если известен алгоритм решения прямой задачи о течении газа в скважине, то задача определения места утечки газа может быть сформулирована как аналог «обратной» задачи.

Пусть скважина работает в «штатном» стационарном режиме с производительностью G_0 (массовый расход газа). В некоторый момент времени расход начал уменьшаться, и после короткого переходного режима скважина продолжала работать в новом стационарном режиме с производительностью $G_1 < G_0$.

Принятые допущения:

Будем считать, что площадь сечения S скважины – постоянна; z – координата, направленная вдоль оси скважины; φ – угол между осью скважины и горизонтальной плоскостью (для вертикальной скважины φ = 90 ºС). Теплопроводностью газа в осевом направлении пренебрегаем.

Известная система уравнений, описывающая стационарное неизотермическое течение газа в трубе [1, 2], может быть представлена в виде:

а) уравнение неразрывности:

$$\frac{d}{dz}(\rho v S) = 0 \rightarrow \rho v S = G_0 = \text{const}, \quad (1.1)$$

выражающее факт постоянства массового расхода по длине скважины;

b) уравнение баланса импульса:

$$\frac{d}{dz}\left[\left(p+\rho v^2\right)S\right]=-\rho g\sin\varphi-\frac{\pi}{8}\lambda d\rho v|v|$$

или, раскрывая левую часть и учитывая (1.1), имеем

$$S\frac{dp}{dz}+G_0\frac{dv}{dz}=-\rho g\sin\varphi-\lambda\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{G_0^2}{\rho S^{5/2}}; \qquad (1.2)$$

c) уравнение сохранения полной энергии:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left[\rho vS\left(u+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\right]=-\rho gvS\sin\varphi+\pi dq_{\hat{a}}$$

или, с учетом (1.1),

$$\mathrm{G}_0\frac{d}{dz}\left(u+\frac{p}{v}\right)+G_0v\frac{dv}{dz}=-\rho gvS\sin\varphi+\pi dq_{\hat{a}}. \qquad (1.3)$$

Здесь ρ и v – плотность и скорость газа соответственно; ρ – давление в газе; d – диаметр скважины; u – внутренняя энергия, отнесенная к единице массы; λ – коэффициент гидравлического сопротивления, который в общем случае зависит от числа $R_e=\frac{\rho vd}{\mu}$ и относительной шероховатости стенок скважины; q_e – количество тепла, передаваемого от газа в скважине к внешней среде с известной температурой $T_в$, которое обычно задается в виде закона Ньютона:

$$q_e=\alpha_T\left(T_в-T\right), \qquad (1.4)$$

где T – температура газа, а α_T – суммарный коэффициент теплопередачи.

Для замыкания системы уравнений (1.1)–(1.3) относительно неизвестных $\rho(z)$, $v(z)$ и $T(z)$ необходимо задать уравнение состояния. Здесь возможны различные варианты. Отметим наиболее часто используемые:

a) $\rho=\rho\left(p,T\right)$ или $\vartheta=\frac{1}{\rho}\left(p,T\right)$, где ϑ – удельный объем; (1.5)

b) уравнение состояния природных газов $\rho=\frac{p}{ZRT}$, (1.5′)

где R – газовая постоянная, а $Z\left(\frac{p}{p_c},\ \frac{T}{T_c}\right)$ – коэффициент сверхсжимаемости, определяемый экспериментально в зависимости от отношения давления ρ и температуры

T к их критическим значениям p_c и T_c для данного газа (для метана p_c = 4.64 МПа, T_c = 190.55 К);

c) предельный случай – уравнение состояния совершенного газа

$$\mathrm{p} = \rho \mathrm{RT}\,. \tag{1.5''}$$

В отличие от уравнения (1.5′′), модель «реального» газа (1.5′) учитывает не только молекулярный вес газа (через газовую постоянную R), но и такие термодинамические константы, как его критическое давление и температура.

Для всех газов существуют критическая изотерма, выше и ниже которой свойства газов качественно различны. Если $T < T_c$, то газ при любом повышении давления остается в газообразном состоянии. Если же $T > T_c$, то для каждой температуры T существует такое критическое значение давления p, при котором газ начинает переходить в жидкую фазу.

Модель совершенного газа (1.5′′) ($Z = 1$) достаточно эффективно работает в интервале не слишком высоких давлений и умеренных температур. В процессах с газом, где давление составляет 5,0 ÷ 15,0 МПа, эта модель давала бы в расчетах некорректные результаты.

Для природного газа значение $Z < 1$. Графики функций $Z\left(\dfrac{p}{p_c},\ \dfrac{T}{T_c}\right)$ приведены в различных пособиях и монографиях [1, 3 и др.].

Задание G_0, давления $p(0) = p_0$ и температуры $T(0) = T_0$ на забое скважины завершает постановку прямой задачи для уравнений (1.2)–(1.3) с учетом (1.4)–(1.5) нахождения распределения давления $p(z)$ и температуры $T(z)$ по стволу скважины.

Выполним некоторые дополнительные преобразования в уравнениях (1.2), (1.3). Используя (1.1), второй член в левой части (1.2) можно представить в виде:

$$G_0 \frac{dv}{dz} = \rho v S \frac{dv}{dz} = \frac{G_0^{\,2}}{S} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{G_0^{\,2}}{S} \frac{d\vartheta}{dz}.$$

Используя предыдущее равенство и уравнение состояния в виде (1.5) для удельного объема ϑ, получим уравнение баланса импульса (1.2) в виде:

$$\left[1 + \left(\frac{\mathrm{G}_0}{\mathrm{S}}\right)^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)_T\right] \frac{dp}{dz} + \left(\frac{G_0}{S}\right)^2 \left(\frac{d\vartheta}{dT}\right)_p \frac{dT}{dz} = -\frac{g \sin\varphi}{\vartheta} - \lambda \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{G_0^2 \vartheta}{S^{5/2}}\,. \tag{1.6}$$

В уравнении энергии (1.3) сумма $\left(u + \frac{p}{v}\right)$ представляет удельную энтальпию h, дифференциал которой равен

$$\mathrm{dh} = \mathrm{c_p} dT + \left(\vartheta - T \frac{d\vartheta}{dT}\bigg|_p \right) dp\,. \tag{1.7}$$

Если в качестве калорического уравнения состояния принять dh= h(p,T) и учесть известное термодинамическое соотношение, получим:

$$\frac{dh}{dp}\bigg|_T = \vartheta - T\frac{d\vartheta}{dT}\bigg|_p.$$

Исключая изменение кинетической энергии путем почленного вычитания из уравнения (1.3) уравнения (1.2), умноженного на скорость газа v, с учетом (1.7) и (1.4), получаем ***уравнение притока тепла*** [4], которое заменяет уравнение энергии:

$$\left[-\mathrm{T}\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{dT}} \right)_p \right] \frac{dp}{dz} + c_p \frac{dT}{dz} = \frac{\pi d \alpha_T}{G_0} + \lambda \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{(G_0 \vartheta)^2}{S^{5/2}}\,. \tag{1.8}$$

Таким образом, окончательно прямая задача сводится к решению системы уравнений (1.6), (1.8) при задании давления и температуры на забое скважины. Для дальнейших исследований систему (1.6), (1.8) обычно приводят к канонической форме, то есть представляют в виде, разрешенном относительно производных dp/dz и dT/dz [5]:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{dT}{dz} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{1.9}$$

где Δ и Δ_l – соответствующие определители.

Основной определитель Δ требует комментариев. Для системы (1.6), (1.8) он равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \left(\frac{G_0}{S}\right)^2 \frac{d\vartheta}{dp}\Big|_T & \left(\frac{G_0}{S}\right)^2 \frac{d\vartheta}{dT}\Big|_p \\ -T\frac{d\vartheta}{dT} & c_p \end{vmatrix} = c_p\left[1 + \left(\frac{G_0}{S}\right)^2 \frac{d\vartheta}{dp}\Big|_T\right] + \left(\frac{G_0}{S}\right)^2 T \left(\frac{d\vartheta}{dT}\Big|_p\right)^2 =$$
$$= c_p\left[1 + v^2\left(\vartheta^{-2}\frac{d\vartheta}{dp}\Big|_T + \frac{T}{c_p\vartheta^2}\left(\frac{d\vartheta}{dT}\Big|_p\right)^2\right)\right]. \tag{1.10}$$

Последнее равенство получается после замены

$$\left(\frac{G_0}{S}\right)^2 = v^2\rho^2 = \frac{v^2}{\vartheta^2}.$$

В работе [5] показано, что (1.10) можно свести к следующему соотношению:

$$\Delta = c_p\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c_p\left(1 - M^2\right), \tag{1.11}$$

где $M = v/c -$ число Маха, $c -$ местная (изоэнтропная) скорость звука в газе. Из (1.11) следует, что $\Delta = 0$ при $M = 1$, то есть когда скорость газа v равна местной скорости звука c. Это условие соответствует критическому течению. При этом $dp/dz \to \infty$, что соответствует образованию скачков давления и температуры.

Полученная система уравнений (1.9) имеет достаточно общий характер (не раскрываем здесь громоздкий вид определителей Δ_1 и Δ_2) и во многих случаях может быть упрощена для конкретных режимов течения газа.

2. Упрощенная модель стационарного течения газа

При «штатной» работе скважины течение газа – дозвуковое. Если не рассматривать пусковые режимы и аварийные выбросы скважины, то можно пренебречь инерционными членами в уравнениях импульса (1.6) и энергии (1.8) (т.е. членами, пропорциональными v_2). Тогда определители в (1.9) примут вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -T\left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial T}\right)_p & c_p \end{vmatrix} = c_p$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\dfrac{g\sin\varphi}{\vartheta} - \lambda\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\dfrac{G_0^2\vartheta}{S^{5/2}} & 0 \\ \dfrac{\pi d\alpha_T(T_e - T)}{G_0} + \lambda\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\dfrac{(G_0\vartheta)^2}{S^{5/2}} & c_p \end{vmatrix} = -c_p\left(\dfrac{g\sin\varphi}{\vartheta} + \lambda\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\dfrac{G_0^2\vartheta}{S^{5/2}}\right),$$

$$-\frac{g\sin\varphi T}{\vartheta}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial T}\right)_p, \qquad (1.10')$$

а система (1.9) упрощается:

$$\frac{dp}{dz} = \Phi_1(p,T), \qquad \frac{dp}{dz} = \Phi_2(p,T), \qquad (2.1)$$

где

$$\Phi_1 = -\rho g\sin\varphi - \lambda\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{G_0^2\vartheta}{S^{5/2}},$$

$$\Phi_2 = \left[\frac{\pi d\alpha_T(T_e - T)}{G_0} + \lambda\frac{\sqrt{\pi}}{4}\vartheta\left(\vartheta - T\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial T}\right)\Big|_p\right) - \rho g\sin\varphi T\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial T}\right)_p\right]c_p^{-1}. \qquad (2.2)$$

Дальнейшие упрощения модели связаны с рядом допущений, оправданных в практических приложениях. При нормальной эксплуатации производительность скважин такова, что реализуется развитое турбулентное течение газа, при котором коэффициент гидравлического сопротивления λ не зависит от числа *Re*, а определяется только относительной шероховатостью стенок скважины. Существуют различные аппроксимации для расчета λ.

Будем в дальнейшем использовать уравнение состояния природного газа в форме (1.5`), считая коэффициент сверхсжимаемости *Z(p, T)* постоянной величиной $\overline{Z}$, осредненной соответствующим образом по стволу скважины, так что

$$\vartheta = \frac{1}{\rho} = \frac{\overline{Z}RT}{p} \text{ и } \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial T}\right)_p = \frac{\overline{Z}R}{p}.$$

Тогда функция Φ_2 в (2.2) принимает вид:

$$\Phi_2 = \frac{\pi d \alpha_T (T_e - T)}{G_0 c_p} - \frac{g \sin \varphi}{c_p}. \quad (2.3)$$

Для стационарного течения газа распределения по глубине температуры T_e горных пород принять в виде:

$$T_e(z) = T_0 - \Gamma_z, \quad (2.4)$$

где T_0 – пластовая температура (z = 0, ось z направлена вертикально вверх), Г – геотермический градиент. В среднем геотермический градиент Г, то есть возрастание температуры в недрах Земли, составляет 1.5–3 ºС/100 м. Эта величина зависит от строения, теплопроводности горных пород, циркуляции подземных вод и ряда других факторов, а средняя температура

$$\overline{T}_e = T_0 - \frac{1}{2}\Gamma L, \text{ где } L \text{ – длина ствола скважины.}$$

Тогда упрощенная система уравнений (2.1)–(2.2) для вертикальной скважины принимает вид:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{gp}{\overline{z}RT} - \lambda \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{G_0^2 \overline{z} RT}{S^{5/2} p},$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\pi d \alpha_T (T_e - T)}{G_0 c_p} - \frac{g}{c_p}. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) образуют систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных p и $\overline{T}$.

Если можно пренебречь гравитационной силой (второе слагаемое в правой части второго уравнения системы (2.5)), то для распределения температуры $T(z)$ получается аналитическое выражение, известное как формула В.Г. Шухова:

$$\frac{T(z)-T_e}{T_0-T_e}=e^{-\frac{\pi d\alpha_T}{G_0 c_p}z}. \qquad (2.6)$$

3. Математические формулировки задачи об определении места утечек газа

Система уравнений, описывающая стационарное неизотермическое течение газа в скважине, в общем случае сводится к (1.9), а в упрощенной форме – к системе (2.5).

В безразмерных переменных

$$\xi = z/L, \quad \bar{p}=p/p_0, \quad \bar{T}=T/T_0, \quad \bar{T}_e=T_e/T_0, \quad P=(\bar{p})^2 \quad (\xi\in[0.1]). \qquad (3.1)$$

($L-$ длина ствола скважины; p_0, T_0- пластовое давление и температура соответственно) эта система принимает вид:

$$\frac{dP}{d\xi}=-\pi_1\frac{P}{\bar{T}}-\pi_2\bar{T}; \quad \frac{d\bar{T}}{d\xi}=\pi_3(\bar{T}_e-\bar{T})-\pi_4. \qquad (3.2)$$

Здесь π_i-безразмерные комплексы:

$$\pi_1=\frac{gL}{2\bar{z}RT_0}, \quad \pi_2=\lambda\frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{L\bar{z}R}{S^{5/2}}\frac{T_0}{P_0}, \quad \pi_3=\frac{\pi d\alpha_T L}{G_0 c_p}, \quad \pi_4=\frac{gL}{c_p T_0}. \qquad (3.3)$$

Пусть место утечки l_α определяется безразмерным параметром $l=l_\alpha/L$ и зафиксирован момент снижения производительности скважины от величины G_0 до $G_1<$ G_0 так, что

$$G=\begin{cases}G_0 & \text{при} \quad 0\le\xi\le l\\ G_1 & \text{при} \quad l\le\xi\le 1.\end{cases} \qquad (3.4)$$

Задача состоит в нахождении координаты l. Покажем, что для определения l (при известных G_1, T_0 и p_0) достаточно замерить давление на устье скважины и найти $P_L = P(1)$.

Сделаем преобразование координат так, чтобы неизвестная l входила в правую часть уравнений (3.2).

1) Преобразование $\zeta=\xi/2l$ переводит отрезок [0, l] в отрезок [0, 1/2],

2) а преобразованием $\eta=\frac{1}{2}+\frac{\xi-l}{2(1-l)}$ отрезок $[l, \; 1]$ переводится в отрезок $[1|2, \; 1]$.

Распределение температуры T_e в горных породах в новых переменных примет вид:

$$\overline{T_e}(\xi)=1-\frac{\Gamma L}{T_0}\xi=1-2l\frac{\Gamma L}{T_0}\zeta=T_e(\zeta) \text{ при } 0\le\zeta<\frac{1}{2}, \tag{3.5}$$

$$\overline{T_e}(\eta)=1-\frac{\Gamma L}{T_0}(2\eta-1)(1-l)=\overline{T_e^1}(\eta) \text{ при } \frac{1}{2}\le\eta\le 1. \tag{3.6}$$

Тогда система уравнений (3.2) будет иметь вид на соответствующих отрезках (с учетом (3.5) и (3.6)):

$$\frac{dp}{d\zeta}=-2l\left(\pi_1\frac{P}{\overline{T}}+\rho_2\overline{T}\right),\qquad \frac{d\overline{T}}{d\zeta}+2l\pi_3\overline{T}=f(\zeta,l) \text{ при } 0\le\zeta<\frac{1}{2} \tag{3.7}$$

$$\frac{dp^1}{d\eta}=-2(1-l)\left(\pi_1\frac{p^1}{\overline{T}^1}+\pi_2\overline{T}^1\right),\qquad \frac{d\overline{T}^1}{d\eta}+2(1-l)\pi_3{}^1\overline{T}^1=f_1(\eta,l) \text{ при } \frac{1}{2}\le\eta\le 1. \tag{3.8}$$

$$f(\zeta,l)=2l\left[\pi_3\left(1-2l\frac{\Gamma L}{T_0}\zeta\right)-\pi_4\right],$$

$$f_1(\eta,l)=2(1-l)\pi_3^1\left[1-\frac{\Gamma L}{T_0}(2\eta-1)(1-l)+l\right]-2(1-l)\pi_4. \tag{3.9}$$

Комплекс π_3^1 получается из π_3 (см. (3.3)) заменой G_0 на G_1.

В формулировке (3.7)–(3.8) неизвестная координата l входит как параметр в систему уравнений, и для ее определения можно использовать одну из методик решения обратных задач [6]. В результате определение l сведется к интегрированию системы (3.7)–(3.8) при следующих граничных условиях:

$$P(0)=1,\quad \overline{T}(0)=1;\quad P=P^1,\quad \overline{T}=\overline{T}^1 \text{ при } \zeta=\eta=\frac{1}{2};\qquad P^1(1)=P(1) \text{ (или } T^1(1)=T_L^{(1)}\text{)}. \tag{3.10}$$

Заметим, что в силу допущения об использовании среднего значения коэффициента $\overline{Z}=\mathrm{const}$, уравнения (3.7) для температуры $\overline{T}$ в стволе скважины не зависят явно от давления, являются линейными и можно построить их аналитические решения $\overline{T}(\zeta)$ и $\overline{T}^1(\eta)$ при соответствующих граничных условиях:

$$\overline{T}(0)=1,\qquad \overline{T}\left(\frac{1}{2}\right)=\overline{T}^1\left(\frac{1}{2}\right).$$

Эти решения имеют следующий вид:

$$\overline{T}(\zeta,l)=1+\frac{\pi_4-\Gamma L/T_0}{\pi_3}\left(e^{-2l\pi_3\zeta}-1\right)-2l\frac{\Gamma l}{T_0}\cdot\zeta,\qquad \zeta\in\left[0,\frac{1}{2}\right];$$

$$\overline{\mathrm{T}}^1(\eta,l)=T\left(\frac{1}{2}\right)-\left(1+l+2\frac{\Gamma\mathrm{L}}{\mathrm{T}_0}-\frac{\pi_4}{\pi_3^1}\right)e^{(1-l)\pi_3^1}+\left[1+l-\frac{\pi_4}{\pi_3^1}-\frac{\Gamma\mathrm{L}}{\mathrm{T}_0}(2\eta-3)\right]e^{2(1-l)\pi_3^1}\zeta,\quad \eta\in\left[\frac{1}{2},1\right),$$

где $\overline{T}\left(\frac{1}{2},l\right)=1+\frac{\pi_4-\Gamma\mathrm{L}/\mathrm{T}_0}{\pi_3}\left(e^{-l\pi_3}-1\right)-l\frac{\Gamma\mathrm{L}}{\mathrm{T}_0}$.

Подстановка этих решений в уравнения (3.7), (3.8) для давления при условиях (3.10) приводит их к линейным уравнениям относительно P, решения которых также могут быть получены в квадратурах в виде комбинаций экспоненциальных и линейных функций относительно ζ и l. При этом определение искомого места утечки газа l сведется к вычислительной процедуре решения трансцендентного уравнения.

4. Метод квазилинеаризации

При использовании уравнения состояния (1.5) общего вида система уравнений (1.9) становится полностью нелинейной. В этом случае для решения задачи удобно использовать метод квазилинеаризации, техника которого изложена в [6, 7].

Для понимания идеи метода представим уравнение (1.9) в общем виде на соответствующих отрезках:

$$\frac{dp}{d\zeta}=f_1\left(\zeta,P,\overline{T},l\right),\quad \frac{dT}{d\zeta}=f_2\left(\zeta,P,\overline{T},l\right), \tag{4.1}$$

$$\frac{dP^1}{d\eta}=f_1^1\left(\eta,P,\overline{T},l\right),\quad \frac{dT^1}{d\eta}=f_2^1\left(\eta,P,\overline{T},l\right). \tag{4.2}$$

Вид функций f_i и f_i^1 представлен равенствами (3.9) для упрощенной модели и может быть выражен из (1.10), (1.10′), если используется уравнение состояния (1.5′) реального газа, когда коэффициент сверхсжимаемости Z зависит от приведенных давления и температуры.

Применительно к рассматриваемой задаче техника линеаризации системы (4.1) относительно нулевого приближения $P^0(\zeta)$, $T^0(\zeta)$, l^0 приводит к поиску решения этой системы в виде:

$$P(\zeta)=a_{11}(\zeta)l+a_1(\zeta),$$

$$\overline{\mathrm{T}}(\zeta)=a_{21}(\zeta)l+a_2(\zeta). \tag{4.3}$$

При этом определение прогоночных коэффициентов сводится к решению задачи Коши [7]:

1) $a_{11}^{1} = r_{1P}a_{11} + r_{1T}a_{21} + r_{1l}$,

$$a_{21}^{1} = r_{2P}a_{11} + r_{2T}a_{21} + r_{2l} \tag{4.4}$$

при условиях $a_{11}(0) = 0, \quad a_{21}(0) = 0$;

2) $a_{1}^{1} = r_{1P}\left(a_1 - P^0\right) + r_{1T}\left(a_2 - \overline{T}^0\right) + f_1^0 - r_{1l}l^0$,

$$a_{2}^{1} = r_{2P}\left(a_1 - P^0\right) + r_{2T}\left(a_2 - \overline{T}^0\right) + f_2^0 - r_{2l}l^0 \tag{4.5}$$

при условиях $a_1(0) = 1, \quad a_2(0) = 1$.

В левых частях уравнений (4.4), (4.5) стоят производные от соответствующих параметров. Здесь $r_{1\text{P,T,l}}$ обозначает соответственно производные $\left(\frac{\partial f_1}{\partial p}\right)_0, \left(\frac{\partial f_1}{\partial \overline{T}}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial f_1}{\partial \text{l}}\right)_0$, а $r_{2,P,T,l}$ – производные $\left(\frac{\partial f_2}{\partial P}\right)_0, \left(\frac{\partial f_2}{\partial \overline{\overline{T}}}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial f_2}{\partial l}\right)_0$; нижний индекс «0» означает, что производные вычисляются при $\zeta = 0$.

Определив прогоночные коэффициенты, можно, в частности, найти из (4.3)

$P\left(\frac{1}{2}\right) = a_{11}\left(\frac{1}{2}\right)l + a_1\left(\frac{1}{2}\right), \quad \overline{T}\left(\frac{1}{2}\right) = a_{21}\left(\frac{1}{2}\right)l + a_2\left(\frac{1}{2}\right)$, где l пока не известно.

Аналогично для системы (4.2) ее решение после линеаризации принимает вид:

$$\text{P} = в_{11}(\eta)l + в_1(\eta)$$

$$\overline{\text{T}} = в_{21}(\eta)l + в_2(\eta). \tag{4.6}$$

Прогоночные коэффициенты $в_{ij}$ и $в_i$ определяются из уравнений (4.4), (4.5), в которых f_i заменяются на f_i^1 (i = 1, 2), а прогоночные коэффициенты – на $в_{11}$, $в_{21}$, $в_1$ и $в_2$. Начальные условия для них находятся из второго условия (3.10) подстановкой в (4.6) при $\zeta = \eta = \frac{1}{2}$:

$$a_{11}\left(\frac{1}{2}\right)l + a_1\left(\frac{1}{2}\right) = в_{11}\left(\frac{1}{2}\right)1 + в_1\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$a_{21}\left(\frac{1}{2}\right)l + a_2\left(\frac{1}{2}\right) = в_{21}\left(\frac{1}{2}\right)1 + в_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Не ограничивая общности, здесь достаточно положить

$a_{11} = в_{11}, \quad a_{21} = в_{21}, \quad a_1 = в_1, \quad a_2 = в_2.$

Эти равенства служат начальными условиями для прогоночных функций $в_{11}(\eta), \quad в_{21}(\eta), \quad в_1(\eta)$ и $в_2(\eta)$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}, \quad 1\right]$.

Теперь параметр l можно найти, используя третье условие (3.10) для давления при $\zeta = \eta = 1$:

$$\mathrm{P_L} = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^2 = P^1(1) = P(1) = в_{11}(1)l + в_1(1),$$

откуда получаем:

$$l = \frac{P_L - в_1(1)}{в_{11}(1)}. \qquad (4.7)$$

Определив l в первом приближении и зная прогоночные коэффициенты из (4.3) и (4.6), можно найти давление и температуру на всем отрезке [0, 1]. Затем, используя найденные $P(\xi), \overline{T}(\xi)$ и l в качестве первого приближения, аналогично найдем второе приближение и т.д.

При разумном задании нулевого приближения для расчета l потребуется 4–5 итераций с точностью ~ 10^{-3}. При этом естественно использовать более простые модели газовой динамики. В частности, в качестве нулевого приближения для давления удобно взять распределение для изотермического течения газа, которое в безразмерных переменных (3.1) имеет вид:

$$P^0(\xi) = P_0 - (P_0 - P_L)\xi,$$

а для температуры – формулу Шухова (2.6).

На каждом шаге итерационного процесса система уравнений (4.4), (4.5) решается с помощью метода Рунге – Кутта третьего порядка.

5. Обсуждение результатов

Рассмотренная расчетная процедура применима и при аварийных выбросах газа из горизонтальных добывающих скважин (угол $\varphi = 0$). В этом случае гравитационный эффект отсутствует (см. (2.1), (2.2)), и безразмерный параметр (в (3.3) и в последующих уравнениях) $\pi_4 = 0$.

Заметим, что если используемые дебитомеры не могут обеспечить необходимую точность измерения дебитов скважины до и после аварии (и отличить их изменение от технологических сбоев), то в этом случае в качестве исходной информации нужно считать известными замеры давлений и температуры на устье $(z = L)$ и забое $(z = 0)$ скважины, т.к. их можно измерить с большей точностью, чем дебит. На этот случай предложенная расчетная схема может быть легко модифицирована.

Следует также отметить, что использование геотермального градиента (2.4) оправдано при достаточно однородной по разрезу горной породе, теплофизические свойства которой слабо меняются от давления и температуры. При больших глубинах газовой скважины (порядка 5–8 км) с сильно меняющимся минеральным составом горных пород, для арктических регионов распространения многолетнемерзлых пород, при выходе скважины в морскую акваторию (на Арктическом шельфе) необходим более полный учет реальных свойств газа. В частности, необходимо задание адекватного уравнения состояния, зависимости теплоемкости газа и коэффициента сверхсжимаемости Z от давления и температуры. В некоторых случаях рассмотренную систему уравнений необходимо дополнить (вместо (2.4)) уравнением распространения тепла в горных породах и условиями сопряжения тепловых потоков на стенке скважины. Но любое усложнение модели не меняет идейной основы предложенной вычислительной схемы.

Заключение

Построена математическая модель для определения мест аварийных утечек газа в газовой скважине по известным замерам параметров (массового расхода газа до и после аварии, давления на устье и забое скважины и температуры в околоскважинной зоне).

Постановка прямой задачи сведена к «обратной» с помощью специального преобразования координат. Использованы апробированные алгоритмические средства (квазилинеаризация нелинейных систем уравнений и метод Рунге – Кутта третьего порядка).

Реализация модели в виде автоматизированного симулятора станет экспресс-методом мониторинга, прогноза возможных аварийных ситуаций на промысле и оперативной локализации места разгерметизации скважины, а также ее частичного или полного (на всё сечение) разрушения.

Проблема оперативного реагирования на возникновение «нештатных» ситуаций, особенно в случае аварийного фонтанирования скважин (прежде всего на Арктическом шельфе и в районах вечной мерзлоты [8]), имеет важное природоохранное и практическое значение, т.к. эффективность и стоимость ликвидации аварии во многом зависят от времени и точности ее обнаружения.

Статья написана в рамках выполнения Программы Президиума РАН на 2017 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976. 888 с.

2. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

3. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидродинамика. М.: Недра, 1993. 408 с.

4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1994. 528 с.

5. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.

6. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные граничные задачи. М.: Мир, 1968. 183 с.

7. *Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А., Метляева Э.А.* Обратные задачи стационарного неизотермического течения газа в трубах // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1977. № 1. С. 143–145.

8. *Гриценко А.И, Акопова Г.С., Максимов В.М.* Экология. Нефть и газ. М.: Наука, 1997. 598 с.