МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР

И.А. Володин, И.Я. Чеботарева
ИПНГ РАН, e-mail: irinache@inbox.ru

Проблемы нелинейного поведения геосреды связаны со специфической моделью ее строения, описание которой дается ниже. Необходимо сформулировать условия организации геосреды на микроуровне, для которых будет разрабатываться дальнейшая теория.

В основу описания математической модели закладывается модель нелинейной многомасштабной динамики геосреды [1]. Геологическая среда является структурированной применительно ко всем масштабам, включая микромасштаб. М.А. Садовским [2] были сформулированы физические принципы исследования процессов деформирования геосреды на основе анализа различных взаимодействий и обмена энергией в системе блоков разной иерархии. Эти принципы могут быть положены в основу построения нелинейной математической модели динамики геологической среды.

В работе [1] показано, что важную роль в формировании нелинейных диссипативных структур в волновых полях играет структурный фактор α. Наиболее естественно его физический смысл можно описать в планарных волноводах – пакетах ориентированных трещин. В таких волноводах распространение сейсмоакустических сигналов является стохастическим, так как «пакеты» – это не идеальные длинные волноводы, а короткие ориентированные трещины, на каких-то участках, возможно, выстроенные в цепочки. В результате многократных отражений от краев волновода формируется «геометрическая» дисперсия по волноводному типу с дисперсионным соотношением $\omega^2 = c^2k^2 + \alpha$ (где ω – частота излучения; k – волновое число вдоль волновода; c – скорость акустических волн в структурно однородной среде без нарушений; $\alpha = (nc\pi/h)2 > 0$ – коэффициент дисперсии, связанный с формированием стоячих волн в волноводе; n – номер гармоники, нормальной моды; h – среднее расстояние между микротрещинами) [3].

Сейсмическая волна распространяется по зигзагообразной траектории с углом скольжения, тангенс которого и определяет геометрическую дисперсию. Итак, дисперсия формируется в результате того, что часть волнового вектора «расходуется» на формирование стоячих волн поперек волновода.

На малых расстояниях структурированность геологической среды связана с наличием пустотного пространства (пористости), и именно это обстоятельство определяет нелинейные свойства геосреды. Наиболее важной, с точки зрения этих свойств, является морфология пустотного пространства, в основу которой заложена классификация, представленная в работе А.Н. Дмитриевского [4].

Следует заметить, что существует достаточно много работ, в которых в рамках материаловедения делаются попытки построения микромеханики материалов со структурой. Разработанная, например, в [5] стохастическая теория деформации материалов со структурой может быть применена к описанию динамики твердой геосреды, а первые члены разложения используемого потенциала Морса приводят к виду тензора напряжений, который применяется в настоящей работе.

Был проведен анализ трехмерного динамического уравнения для нелинейной геологической среды в третьем порядке теории возмущений при условии отсутствия диссипации. Эти выводы носят технический характер и следуют выводам работы [1]. Как уже отмечалось в [1], рассмотрение второго порядка деформации геосреды применительно к мелким масштабам приводит к появлению флуктуаций вектора смещений в направлениях его «неполяризованных» компонент, которые также модулируют колебания с несущей частотой.

В качестве пространственных координат рассматриваются параметры (X,Y,Z), у которых индексы внизу соответствуют в выбранной классификации номеру масштаба минус единица. Подстановка вектор-функции $[A_1\exp(i\theta),\ A_2\exp(i\theta),\ A_3\exp(i\theta)]$ в $O(\varepsilon^3)$ (часть основного динамического уравнения) приводит к следующей системе уравнений (1), являющейся условием отсутствия секулярных членов на третьем порядке теории возмущений:

$$
\begin{aligned}
&i[2kc_s^2\partial A_1/\partial X_2 + \omega\partial A_1/\partial T_2 + k(c_p^2-c_s^2)\mathrm{div}_2A] - \\
&\quad - \partial^2A_1/\partial T_1^2 + c_s^2[\partial^2A_1/\partial X_1^2 + \partial^2A_1/\partial Y_1^2 + \partial^2A_1/\partial Z_1^2] + \\
&\quad + (c_p^2-c_s^2)\partial(\mathrm{div}_1A)/\partial X_1 + b_{11}|A_1|^2A_1 + b_{12}(|A_2|^2 + |A_3|^2)A_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&i[kc_s^2\partial A_2/\partial X_2 + \omega\partial A_2/\partial T_2 + k(c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Y_2] - \\
&\quad - \partial^2A_2/\partial T_1^2 + c_s^2[\partial^2A_2/\partial X_1^2 + \partial^2A_2/\partial Y_1^2 + \partial^2A_2/\partial Z_1^2] + \\
&\quad + (c_p^2-c_s^2)\partial(\mathrm{div}_1A)/\partial Y_1 + b_{21}|A_1|^2A_2 + b_{22}A_1^2A_2^* = 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$i[kc_s^2\partial A_3/\partial X_2 + \omega\partial A_3/\partial T_2 + k(c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Z_2] -$$
$$- \partial^2 A_3/\partial T_1^2 + c_s^2[\partial^2 A_3/\partial X_1^2 + \partial^2 A_3/\partial Y_1^2 + \partial^2 A_3/\partial Z_1^2] +$$
$$+ (c_p^2-c_s^2)\partial(\mathrm{div}_1 A)/\partial Z_1 + b_{31}|A_1|^2 A_3 + b_{32}A_1^2 A_3^* = 0.$$

Дифференцированием выражения для дивергенции вектора смещений во втором масштабе:

$$(c_p^2-c_s^2)\mathrm{div}_1 A = c_p^2\partial A_1/\partial X_1 + \omega/k\partial A_1/\partial T_1$$

получаются выражения:

$$(c_p^2-c_s^2)\partial(\mathrm{div}_1 A)/\partial X_1 = - \partial\, (c_p^2\partial A_1/\partial X_1 + \omega/k\partial A_1/\partial T_1)\, /\partial X_1$$
$$(c_p^2-c_s^2)\partial(\mathrm{div}_1 A)/\partial Y_1 = - \partial\, (c_p^2\partial A_1/\partial X_1 + \omega/k\partial A_1/\partial T_1)\, /\partial Y_1 \qquad (2)$$
$$(c_p^2-c_s^2)\partial(\mathrm{div}_1 A)/\partial Z_1 = - \partial\, (c_p^2\partial A_1/\partial X_1 + \omega/k\partial A_1/\partial T_1)\, /\partial Z_1.$$

Подстановка выражений (2) в систему уравнений (1) приводит к новой системе уравнений, совместной с условиями секулярности второго порядка. При этом первое уравнение допускает различные представления, которые будут использоваться при разных подходах:

$$i[k(c_p^2+c_s^2)\partial A_1/\partial X_2 + \omega\partial A_1/\partial T_2 + k(c_p^2-c_s^2)(\partial A_2/\partial Y_2 + \partial A_3/\partial Z_2)] +$$
$$- \partial^2 A_1/\partial T_1^2 + c_s^2[\partial^2 A_1/\partial X_1^2 + \partial^2 A_1/\partial Y_1^2 + \partial^2 A_1/\partial Z_1^2) +$$
$$+ (c_p^2-c_s^2)\partial(\mathrm{div}_1 A)/\partial X_1 + b_{11}|A_1|^2 A_1 + b_{12}(|A_2|^2 + |A_3|^2)A_1 = 0 =$$
$$= i[k(c_p^2+c_s^2)\partial A_1/\partial X_2 + \omega\partial A_1/\partial T_2 + k(c_p^2-c_s^2)(\partial A_2/\partial Y_2 + \partial A_3/\partial Z_2)] +$$
$$- \partial^2 A_1/\partial T_1^2 + c_p^2\partial^2 A_1/\partial X_1^2 + c_s^2(\partial^2 A_1/\partial Y_1^2 + \partial^2 A_1/\partial Z_1^2) +$$
$$+(c_p^2-c_s^2)\partial(\partial A_2/\partial Y_1+\partial A_3/\partial Z_1)/\partial X_1+b_{11}|A_1|^2 A_1+b_{12}(|A_2|^2 +|A_3|^2)A_1=$$
$$= i[k(c_p^2+c_s^2)\partial A_1/\partial X_2 + \omega\partial A_1/\partial T_2 + k(c_p^2-c_s^2)(\partial A_2/\partial Y_2 + \partial A_3/\partial Z_2)] +$$
$$+ [(c_s^2- c_p^2)\partial^2 A_1/\partial X_1^2 -\omega/k\partial^2 A_1/\partial T_1\partial X_1 - \partial^2 A_1/\partial T_1^2] +$$
$$+c_s^2[\partial^2 A_1/\partial Y_1^2+\partial^2 A_1/\partial Z_1^2)+b_1|A_1|^2 A_1+b_{11}|A_1|^2 A_1+b_{12}(|A_2|^2+|A_3|^2)A_1.$$

Остальные два уравнения основной системы динамических уравнений приводятся, соответственно, к виду:

$$i[kc_s^2\partial A_2/\partial X_2 + \omega\partial A_2/\partial T_2 + k(c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Y_2] -$$
$$- \partial^2 A_2/\partial T_1^2 + c_s^2[\partial^2 A_2/\partial X_1^2 + \partial^2 A_2/\partial Y_1^2 + \partial^2 A_2/\partial Z_1^2] -$$
$$- \partial\, (c_p^2\partial A_1/\partial X_1 + \omega/k\partial A_1/\partial T_1)\, /\partial Y_1 + b_{21}|A_1|^2 A_2 + b_{22}A_1^2 A_2^* = 0 \qquad (3)$$
$$i[kc_s^2\partial A_3/\partial X_2 + \omega\partial A_3/\partial T_2 + k(c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Z_2] -$$
$$- \partial^2 A_3/\partial T_1^2 + c_s^2[\partial^2 A_3/\partial X_1^2 + \partial^2 A_3/\partial Y_1^2 + \partial^2 A_3/\partial Z_1^2] -$$
$$- \partial(c_p^2\partial A_1/\partial X_1+\omega/k\partial A_1/\partial T_1)/\partial Z_1+b_{31}|A_1|^2 A_3+b_{32}A_1^2 A_3^* = 0. \quad (3)$$

Анализ полученной системы уравнений будет проведен для двух случаев. Первый случай соответствует динамике поляризованной поперечной волны в нелинейной среде. Второй – асимптотической динамике волн смешанного типа.

В приведенных выше уравнениях (3) операторы Лапласа зависят от трех пространственных координат. При описании распространения волны от точечного сейсмического источника можно стандартным образом можно разделить переменные в сферической системе отсчета и рассматривать часть уравнения Лапласа для радиальной компоненты расходящейся волны. В этом случае в уравнении появляется диссипативный член, который убывает пропорционально расстоянию от источника. Отсюда следует, что при исследовании радиальной компоненты поля возмущений условие слабой диссипации будет иметь место на достаточном удалении от источника сейсмических волн.

В работе [1] использовались математические методы, подробно описанные в [2] и применяемые, в основном, в теории сверхпроводимости. Согласно исследованиям [1], при определенных условиях эти методы применимы для описания сейсмического поля смешанного типа. Далее описано применение абелевой модели Хиггса для сейсмических полей трехмерной пространственной конфигурации.

Система уравнений (3) будет рассматриваться совместно с условиями секулярности второго порядка [1]. Равенство нулю секулярного члена второго порядка представляется в виде следующей системы уравнений:

$$kc_s^2\partial A_1/\partial X_1+\omega\partial A_1/\partial T_1+k(c_p^2-c_s^2)\mathrm{div}_1A+k(c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial X_1+i\gamma\partial A_1/\partial T_1 = 0$$
$$kc_s^2\partial A_2/\partial X_1 + \omega\partial A_2/\partial T_1 + k(c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Y_1 - \gamma\partial A_2/\partial T_1 = 0 \qquad (4)$$
$$kc_s^2\partial A_3/\partial X_1 + \omega\partial A_3/\partial T_1 + k(c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Z_1 - \gamma\partial A_3/\partial T_1 = 0.$$

При отсутствии диссипации система имеет вид:

$$kc_p^2\partial A_1/\partial X_1 + \omega\partial A_1/\partial T_1 + k(c_p^2-c_s^2)\mathrm{div}_1A = 0$$
$$kc_s^2\partial A_2/\partial X_1 + \omega\partial A_2/\partial T_1 + k(c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Y_1 = 0 \qquad (5)$$
$$kc_s^2\partial A_3/\partial X_1 + \omega\partial A_3/\partial T_1 + k(c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Z_1 = 0.$$

Если ввести новую координату X_1, которая соответствует движению в старой координате X_1 с групповой скоростью $X_1 \to X_1+c_gT_1$ (где $c_g=\omega/k$ – групповая скорость), то в каждом уравнении группы членов $(c_{11}\partial^2A_i/\partial T_1^2 + c_{22}\partial^2A_i/\partial X_1^2 + c_{12}\partial^2A_i/\partial T_1\partial X_1)$ приводятся такой заменой координат к виду $c_i\partial^2A_i/\partial X_1^2$ (i = 1,2,3); X_1, соответственно, – новая координата. В частности, из предыдущего пункта следует, что $c_1= -(c_p^2-c_s^2)$, а $c_2 = c_3$.

Аналогично и по координатам следующего масштаба можно ввести новую координату, связанную с движением в старой координате, но с групповой скоростью $X_2 \rightarrow X_2 - c_g T_2$ (с движением «встречным» по отношению к движению в координате X_1). Указанные подстановки приводят основную систему уравнений к следующему виду:

$$\begin{aligned} &ik[(c_p^2+c_s^2-c_g^2)\partial A_1/\partial X_2 + (c_p^2-c_s^2)(\partial A_2/\partial Y_2 + \partial A_3/\partial Z_2)]- \\ &\quad - c_1\partial^2 A_1/\partial X_1^2 + c_s^2(\partial^2 A_1/\partial Y_1^2 + \partial^2 A_1/\partial Z_1^2) + \\ &\quad + b_{11}|A_1|^2 A_1 + b_{12}(|A_2|^2 + |A_3|^2)A_1 = 0, \qquad (6) \\ &\partial(\partial A_2/\partial Z_1 - \partial A_3/\partial Z_1)/\partial Z_1 = c_3\partial^2 A_2/\partial X_1^2 - c_4\partial^2 A_1/\partial X_1\partial Y_1 - \\ &\quad - ik[(c_s^2-c_g^2)\partial A_2/\partial X_2 + (c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Y_2] - b_{21}|A_1|^2 A_2 - b_{22}A_1^2 A_2^*, \\ &\partial(\partial A_3/\partial Y_1 - \partial A_2/\partial Z_1)/\partial Y_1 = c_3\partial^2 A_3/\partial X_1^2 - c_4\partial^2 A_1/\partial X_1\partial Z_1 - \\ &\quad - ik[(c_s^2-c_g^2)\partial A_3/\partial X_2 + (c_p^2-c_s^2)\partial A_1/\partial Z_2] - b_{31}|A_1|^2 A_3 - b_{32}A_1^2 A_3^*. \end{aligned}$$

Предполагается, что поле возмущений геосреды имеет пространственную конфигурацию, которая с точностью до малых возмущений поляризована в направлении X и его огибающая V вдоль этой координаты зависит от координат второго и третьего масштабов. Возмущения этого поля будут описываться компонентами «векторного потенциала» (A_1,A_2,A_3), которые зависят от координат второго масштаба и не зависят от координат следующих масштабов (X_2, ...), то есть, представляют собой трехмерное ультразвуковое возмущение поляризованного сейсмического поля. Будет считаться, что компоненты этого поля достаточно малы, поэтому в уравнениях можно пренебречь членами, содержащими произведения этих компонент.

Описанные условия можно назвать аддитивной суперпозицией второго и третьего масштабов. В систему уравнений (6) компоненты поля смещений описанной конфигурации подставляются в виде: $A_1 \rightarrow A_1+V$, $A_2 \rightarrow A_2$, $A_3 \rightarrow A_3$.

Вводятся обозначения для компонент формально аналогичных «электромагнитному полю»: (по В.Г. Дубровскому, 2008 г.)

$$F_{32} = \partial A_2/\partial Z_1 - \partial A_3/\partial Y_1\ ,\ F_{23} = - F_{32},\ E_2 = \partial A_2/\partial X_1 - \partial A_1/\partial Y_1, \qquad (7)$$

$$E_3 = \partial A_3/\partial X_1 - \partial A_1/\partial Z_1,$$

а также ковариантных производных:

$$D_x = (\partial/\partial X_1 - iA_1),\ D_y = (\partial/\partial Y_1 - iA_2),\ D_z = (\partial/\partial Z_1 - iA_3),$$

“токов” $\mathrm{Im}[V(D_к V)^*] = J_к$, к=2,3, и “заряда” $\rho = - \mathrm{Im}[V(D_x V)^*]$. (8)

Далее во второе и третье уравнение системы (6) подставляются сформулированные условия и введенные обозначения. При этом в уравнениях оставляются, как это следует из описанной конфигурации поля, только линейные члены по компонентам векторного потенциала и нормируются функции и параметры координат, чтобы коэффициенты сделать равными единице. В результате этих действий указанные уравнения приводятся к виду:

$$A_{2,11} - A_{1,21} - A_{2,33} + A_{3,32} + \mathrm{Im}[V(D_2V)^*] =$$
$$= a(V\partial V^*/\partial Y_1 - V^*\partial V/\partial Y_1) - ik(c_p^2-c_s^2)\partial V/\partial Y_2,$$
$$A_{3,11} - A_{1,31} - A_{3,22} + A_{2,23} + \mathrm{Im}[V(D_3V)^*] =$$
$$= a(V\partial V^*/\partial Z_1 - V^*\partial V/\partial Z_1) - ik(c_p^2-c_s^2)\partial V/\partial Z_2. \qquad (9)$$

Далее вводятся дополнительные условия по конфигурации поля возмущений геосреды.

Асимптотическое условие 1. Зависимость огибающей V от координат второго и третьего масштаба удовлетворяет условию:

$$a\nabla_2 V = i[V\nabla_1 V^* - V^*\nabla_1 V], \qquad (10)$$

где ∇_1 и ∇_2 – градиенты в пространстве (Y, Z), соответственно, во втором и третьем масштабе. Выражение $i[V\nabla_1 V^* - V^*\nabla_1 V]$ в квантовой теории является вектором тока [6] для волновой функции. Аналогично, правая часть уравнений (7) может быть интерпретирована как поток энергии акустического поля ультразвукового диапазона, а равенство (8) – как закон сохранения энергии в совокупности процессов, происходящих применительно к двум масштабам или энергообмена между ними (градиент амплитуды сейсмического поля второго масштаба равен потоку энергии акустического поля).

При выполнении условия (10) уравнения (9) представляют собой «классические уравнения электродинамики Максвелла» (a,b = 2,3):

$$E_{b,x} - F_{ab,a} + J_b = 0. \qquad (11)$$

Первое же уравнение после соответствующих подстановок и использования условий второго порядка теории возмущений, а также удержания членов до второго порядка компонент векторного потенциала, приводится к виду:

$$c_s^2(\partial^2 A_1/\partial Y_1^2 + \partial^2 A_1/\partial Z_1^2) - c_1\, \partial(\partial A_2/\partial Y_2 + \partial A_3/\partial Z_2)/\partial X_1 + b|V|^2 A_1 +$$
$$+ ik(c_p^2+c_s^2-c_g^2)\partial V/\partial X_2 - c_1\partial^2 V/\partial T_1^2 + c_s^2(\partial^2 V/\partial Y_1^2 + \partial^2 V/\partial Z_1^2) + \qquad (12)$$
$$+b_{11}|A_1|^2 V + b_{12}(|A_2|^2 + |A_3|^2)V=0.$$

Аналогично преобразованиям, приводящим к уравнениям (9), можно подставить в данное уравнение (12) условия второго порядка, провести соответствующую группировку членов уравнения и нормировку координатных параметров и значений функций. **Для этого необходимо ввести условие достаточно большой глубины залегания рассматриваемой области геологической среды. В этом случае в процессе форсирования движения структуры среды через эти участки проходит большое количество энергии, которое рассеивая (диссипируя) на неоднородностях, «выжигает» их, при этом коэффициенты уравнения становятся постоянными, что и позволяет сделать указанную операцию.**

В результате получается уравнение:

$$(A_{2,2} + A_{3,3})_{,1} - (A_{1,22} + A_{1,33}) - \mathrm{Im}[V(D_xV)^*] - b(V\partial V^*/\partial X_1 - V^*\partial V/\partial X_1) +$$
$$+ (D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)V + a|V|^2V - ia_1\partial V/\partial X_2 - \partial^2V/\partial T_1^2 -$$
$$- i(\partial A_2V/\partial Y_1 + \partial A_3V/\partial Z_1) + i\partial A_1V/\partial X_1 = 0. \qquad (13)$$

Асимптотическое условие 2. Имеют место следующие условия на процесс обмена энергией между масштабами (дополнительные условия самоорганизации волнового поля применительно к двум масштабам).

1. В продолжение асимптотического условия 1 по первой координате X имеет место равенство:

$$i[a_1\partial V/\partial X_2+(\partial A_2V/\partial Y_1+\partial A_3V/\partial Z_1)]+b(V\partial V^*/\partial X_1-V^*\partial V/\partial X_1)=0,$$

которое можно назвать уравнением неразрывности или уравнением баланса сейсмической энергии. Здесь по сравнению с (12) добавлены члены переноса акустической энергии применительно ко второму масштабу.

2. Зависимость огибающей V от быстрого времени второго масштаба асимптотически соответствует установившемуся, находящемуся в состоянии равновесия волновому полю: $V(T_1) = V\exp(iET_1)$ (откуда следует: $\partial^2V/\partial T_1^2 = c_1E^2V$).

3. Предполагается малость компонент векторного потенциала A, по сравнению с компонентой сейсмического поля V. Величина заряда $\mathrm{Im}[V(D_xV)^*]$ имеет порядок малости компонент ультразвукового поля.

Использование приведенных выше условий позволяет с помощью обычной теории возмущений с точностью до второго порядка относительно малого параметра расщепить уравнение (10) на два уравнения, при соблюдении равенства нулю его отдельных частей. Такое расщепление приводит к следующей системе уравнений:

$$(A_{2,2} + A_{3,3})_{,1} - (A_{1,22} + A_{1,33}) - \mathrm{Im}[V(D_xV)^*] = 0,$$

$$(D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)V + a|V|^2V - E^2V = 0. \qquad (14)$$

Важным результатом выполнения предыдущих условий, естественных с физической точки зрения, является то обстоятельство, что полученные системы уравнений (12) и (13) *инвариантны относительно локальных калибровочных преобразований*, то есть, локальных преобразований фазы сейсмического поля: $V \to V \exp[i\beta(X,Y,Z,T)]$.

Последнее уравнение в (14) приводится к виду:

$$(D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)V = - \lambda(|V|^2V - V),$$

где $\lambda = E^3/a$, а первое уравнение имеет вид «классического уравнения электродинамики»:

$$E_{b,b} = - \rho, \ b = 2,3.$$

Объединенная система преобразованных уравнений (7) и (14) формирует в совокупности так называемую *абелеву модель Хиггса* [7]:

$$E_{b,x} - F_{ab,a} + J_b = 0,$$

$$E_{b,b} = - \rho,$$

$$(D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)V = - \lambda V(|V|^2 - 1). \qquad (15)$$

Данная модель представляется системой уравнений, инвариантной относительно локальных калибровочных преобразований.

Благодаря локальной калибровочной инвариантности можно сформулировать следующий закон сохранения заряда, который является топологическим инвариантом. Если положить значение энергии «электромагнитного поля» $|F|^2 = (1/2)F_{ab}F_{ab}$, то суммарный гамильтониан системы имеет вид:

$$H = (1/2)[|D_yV|^2 + |D_zV|^2 + |F|^2 + W(V)], \ W(V) = 2\lambda(|V|^2 - 1)^2. \qquad (16)$$

Требование конечности энергии динамического процесса в геосреде в рассматриваемом объеме геосреды приводит к следующим граничным условиям:

$$1)\ |F|^2 \to 0, \ 2)\ |D_yV|^2 + |D_zV|^2 \to 0, \ 3)\ |V|^2 \to 1. \qquad (17)$$

При выполнении этих условий и локальной калибровочной инвариантности величина «заряда», целого числа, соответствующего суммарному «магнитному потоку» через плоскость (Y,Z):

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{R^2} F_{yz}\,dydz = N, \qquad (18)$$

является инвариантом и не зависит от координаты или параметра X. Он определяется гомотопическим классом отображений граничной окружности исследуемой области на себя [7] ($S^1 \to S^1$) именно благодаря указанной калибровочной инвариантности. Классы гомотопий этих отображений как раз и задаются локальными калибровочными преобразованиями фазы. Они сохраняют гомотопических класс отображения окружности на себя, так как определены на всем пространстве, включая начало координат. Поэтому каждое отображение, порождаемое калибровочным преобразованием, соответствует тривиальной гомотопии.

Известно, что гомотопическая группа окружности $\pi_1(S^1) = Z$ является группой целых чисел, то есть каждому гомотопическому классу соответствует целое число, степень отображения. ***Важно подчеркнуть, что величина указанного целочисленного инварианта динамики геосреды в сейсмическом диапазоне может быть изменена только за счет изменения граничных условий, то есть, внешних воздействий на моделируемую область геосреды. Это может возникнуть только при глобальной тектонической перестройке территории.***

Благодаря этому инварианту, в структуре поля напряжений формируется система вихревых жгутов, спирального скручивания (в масштабе акустического поля ультразвукового диапазона). В результате образуются системы спиральных трещин усталостного разрушения, то есть, вертикальных каналов деструкции, вдоль которых проходят потоки флюидов.

Отметим некоторые структурные особенности сложно построенных сейсмических полей.

Решения абелевой модели Хиггса для различных целочисленных инвариантов заряда N называются N – вихревыми решениями [7]. Асимптотический вид решения с одиночным вихрем подтверждает выбранный термин.

Компьютерный анализ динамики пары вихрей [7] показал, что при $\lambda=1/2$ они не взаимодействуют, при $\lambda<1/2$ – притягиваются, а при $\lambda>1/2$ – отталкиваются. Иными словами, в качественной картине динамики, описываемой этой моделью, происходит “фазовый скачок” при $\lambda = 1/2$, что соответствует энергиям асимптотических состояний сейсмического поля в ультразвуковом частотном диапазоне $E = (a/2)^{1/3}$.

Качественный анализ динамики процесса при $\lambda>1/2$, то есть в случае отталкивания вихрей, показывает, что в устойчивой среде происходит формирование регулярно расположенной системы вихревых трубок, параллельных оси OX. В исследованиях механизмов проникновения электромагнитного поля в сверхпроводник, физическая динамика которых описывается математическими моделями, аналогичными абелевой модели Хиггса, наличие регулярной системы вихревых трубок подтверждается визуально в прямом эксперименте [7].

Этот результат, касающийся регулярной конфигурации асимптотических состояний сейсмического поля, будет полезен для объяснения возможности существования регулярных структур, наблюдаемых в геодинамических исследованиях. В частности, динамика поля напряжений в окрестности каналов, по которым происходит вторжение изверженных пород в осадочный чехол, описывается, по всей видимости, построенной выше математической моделью.

Подобный механизм может отвечать за формирование различных месторождений жильного типа. Например, согласно [8], на одном из месторождений Алданской провинции серии вертикальных субпараллельных сближенных рудных жил небольшой протяженности равномерно рассредоточены друг относительно друга, то есть, представляют собой квазирегулярную структуру. Кроме того, в [8] показано, что в структурах рудных полей месторождений Нижне-Енисейской металлогенической провинции встречаются жильные зоны, состоящие из одной или нескольких сливающихся или расщепляющихся жил. В частности, это характерно для области медно-никелевого оруденения в Норильском рудном районе.

Такая структура динамики внедрения интрузий (при описании абелевой моделью Хиггса) может свидетельствовать о наличии “точек перегиба”, смене режимов слияния и разбегания вихрей. Существует критическое значение параметров состояния геосреды при $\lambda = 1/2$, разделяющее два разных режима организации смешанного сейсмического поля: притяжения вихрей и их отталкивания. Формирующиеся в осадочном чехле вихревые трубки в первом случае стремятся стягиваться в одну, во втором – разбегаются в разные стороны.

Как отмечают Е.П. Малиновский и Д.О. Онтоев (1983 г.), на Холтосонском месторождении Джидинского рудного узла, представленном кварц-гюбнерит-сульфидными жилами, с глубиной общее число жил уменьшается, происходит их сближение и слияние с образованием нескольких стволовых жил, прослеживающихся до глубины 1000–1100 м. Это как раз является свидетельством большой энергии процесса интрузии в волновом поле напряжений земной коры ультразвукового диапазона, данная энергия превышала свою пороговую величину и соответствовала режиму разбегания вихрей.

Можно также предположить существование долгоживущих конфигураций сейсмического поля в литосфере. При наличии объемного источника сейсмического поля в кристаллическом фундаменте, когда нарушения в нем, формирующие полости-резонаторы, имеют нетривиальную объемную структуру, конфигурация поля в осадочном чехле будет иметь поперечную и продольную компоненту применительно к третьему масштабу коллективных движений. В качестве таких зон нарушений могут выступать очаги сейсмической эмиссии в кристаллическом фундаменте [9], излучение от которых действительно имеет смешанный тип и описывается абелевой моделью Хиггса.

Если резонатор в кристаллическом фундаменте имеет центральный тип, то в качестве основного несущего поля этой модели может служить радиальная компонента сейсмического поля относительно центра очага. Характерными решениями в этой модели будут асимптотически устойчивые конфигурации (типа вихревых трубок, регулярно расположенных вокруг очага), которые являются областями особого состояния поля возмущений, и вдоль которых постоянно действуют скручивающие напряжения.

Эксперименты на образцах, проводимые различными исследователями, показывают, что в таких местах на много порядков возрастают скорости химических реакций и колоссальными темпами идет преобразование вещества. Вследствие этого можно ожидать в указанных вихревых трубках особый, аномальный вещественный состав. Возможно, такова природа кимберлитовых трубок, в которых за длительное время достигается огромный объем физико-химических преобразований.

Действительно, на окружности достаточно большого радиуса можно положить в абелевой модели Хиггса граничные условия, определяющие ее отображение (также в окружность), имеющее топологическую степень n:

$V = f(r)\ \exp(in\varphi)$, $f(\infty) = 1$ (для искомой функции амплитуды коллективного движения следующего масштаба),

$A_2 = -\ nZ_1/r^2\ a(r)$, $A_3 = nY_1/r^2\ a(r)$, $a(\infty) = 1$, для калибровочного поля.

При подстановке этих выражений в систему уравнений абелевой модели Хиггса получается пара обыкновенных дифференциальных уравнений, которые, собственно, и описывают конфигурацию вихревой трубки:

$\partial^2 f/\partial r^2 + (1/r)\partial f/\partial r + [\lambda - (na/r)^2]f - \lambda f^3 = 0,$

$$\partial^2 a/\partial r^2 - (1/r)\partial a/\partial r + af^2 = 0. \qquad (19)$$

В окрестности точки $r = 0$ решения этой системы уравнений имеют асимптотику:

$$f \sim cr^n,\ a \sim r^2/4\pi,$$

то есть, искомая функция имеет в точке 0 нуль порядка n.

Уравнения (19) позволяют исследовать скорость релаксации динамики геосреды от возбуждения на большой внешней окружности с заданным топологическим инвариантом до формирования вихревой трубки или системы таких трубок. Таким образом для конструктивной реализации возбуждений данного типа необходимо создать *«кольцевую антенну»* сейсмического излучения с вращением плоскости поляризации вдоль нее на соответствующее число оборотов. Из условия топологической инвариантности числа вихрей с неизбежностью следует возникновение в области, ограниченной окружностью, системы вихревых трубок.

Работа выполнялась в рамках Программы Президиума РАН «Поисковые и прикладные исследования в интересах развития Арктического региона РФ».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Володин И.А.* Нелинейная динамика геологической среды. М.: ГУП «ВИМИ», 1999. 230 с.
2. *Садовский М.А., Писаренко В.Ф.* Сейсмический процесс в блоковой среде. М.: Наука, 1991. 95 с.
3. *Страхов В.Н., Страхов А.В.* Основные методы нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач гравиметрии и магнитометрии. М.: ОИФЗ РАН, 1999. Ч. I. 40 с.
4. *Дмитриевский А.Н.* Системный литолого-генетический анализ нефтегазоносных осадочных бассейнов. М.: Недра, 1982. 230 с.
5. *Аксельрод Д.Р.* Микромеханика материалов со структурой // Труды XIV Междунар. конгресса IUTAM. М.: Мир, 1979. С. 251–275.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989. Т. III. 768 с.
7. *Додд Р., Эйблек Дж., Гиббон Дж., Норрис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 692 с.

8. *Семинский Ж.В., Филонюк В.А., Черных А.Л.* Структуры рудных месторождений Сибири. М.: Недра, 1987. 183 с.

9. *Volodin I., Pryanikov I., Flavisky N.* On Modelling of the Earthquakes Dynamics in Geodynamical Systems in the Coutext of Geological Medium System Organisation // Earthguakes Induced by Underground Nuclear Explosions: NATO ASI Series. 1994. P. 143–148.